

2
POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM V · ZESZYT 3

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1956

SPIS TREŚCI

B. Konorski: Trzy parametry w polu elektrostatycznym dwóch jednakowych kul	429
S. Szpor: Rola indukcyjności szeregowych w układach ochrony odgromowej stacyjnej — Zasady układów z dławikami	457
W. Paszek: Wpływ forsowania wzbudzenia na pracę równoległą generatorów synchronicznych	513
A. Przyłuski: Przekształcenia liniowe symetrycznych obwodów trójfazowych eliminujące oporności wzajemne	549
A. Turski: Obliczanie strat w gładkich ściankach falowodów kołowych na podstawie równań Maxwella	567

СОДЕРЖАНИЕ

Б. Конорски: Три параметра в электростатическом поле двух одинаковых шаров	429
С. Шпор: Значение последовательных индуктивностей в системах станционной грозозащиты. Принципы систем с дросселями	457
В. Пашек: Влияние форсировки возбуждения на параллельную работу генераторов	513
А. Пшылуски: Линеиные преобразования симметричных трёхфазных контуров исключающих взаимные сопротивления	549
А. Турски: Расчёт потерь в гладких стенках круглых волноводов на основании уравнений Максвелла	567

CONTENTS — SOMMAIRE

B. Konorski: Drei Grundparameter im elektrostatischen Felde zweier gleicher Kugeln	429
S. Szpor: Effects of series inductances in station lightning protection systems — Principles of coil utilization	457
W. Paszek: Einfluss der Stosserregung auf den Parallelbetrieb von Synchrongeneratoren	513
A. Przyłuski: The elimination of mutual impedances by linear transformations of three-phase symmetrical circuits	549
A. Turski: Calculation of losses in smooth walls of circular wave guides on the basis of Maxwell's equations	567

POLSKA AKADEMIA NAUK
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM V · ZESZYT 5

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE
WARSZAWA 1956

R A D A R E D A K C Y J N A

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. STANISŁAW SZPOR
PROF. PAWEŁ SZULKIN

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y

Redaktor Naczelny

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

Z-ca Redaktora Naczelnego

PROF. PAWEŁ NOWACKI

Sekretarz

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI:

Warszawa, ul. Koszykowa 75, Politechnika,
Zakład Elektroniki PAN, tel. 8.32.04

Redakcja czynna: poniedziałki, środy i piątki

Państwowe Wydawnictwo Naukowe - Dział Czasopism
Warszawa, Krakowskie Przedmieście 79

Nakład 1548+101 egz.	Do składania 25 V 1956
Ark. wyd. 13, druk. 10,25	Podpisano do druku 24 IX 1956
Papier dr. sat. 70 g V kl. 70×100/16	Druk ukończono we wrześniu 1956
Cena zł 20,—	K-7-2266 - Zamówienie 237/178

POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10

621.3.011.4 : 621.3.015

B. KONORSKI

Trzy parametry w polu elektrostatycznym dwóch jednakowych kul

Rękopis dostarczono 5. 11. 1955

W pracy niniejszej wykazano, że w polu elektrostatycznym dwóch jednakowych kul decydujące znaczenie mają trzy wielkości g , χ i κ , które nazwano parametrami podstawowymi. Parametr g zależy od układu geometrycznego, parametr χ równa się stosunkowi ładunków obu kul, parametr κ równa się stosunkowi ich potencjałów. Między tymi parametrami istnieje prosta zależność, która pozwala na analizowanie procesów niestacjonarnych, polegających na zmianie odległości, ładunków lub potencjałów obu kul. Dokonując takiej analizy najprostszych procesów stwierdzono istnienie stanów anormalnych, to jest takich, w których potencjał jednej z kul ma znak przeciwny niż jej ładunek. Wykazano związek między powyższymi anomaliami i influencją elektrostatyczną.

Przedstawiona metoda nadaje się również do analizowania procesów ogólniejszych oraz przebiegów czasowych.

1. DEFINICJE I ZALEŻNOŚCI

Zakładamy, że na 2 kulach metalowych K i K' o promieniach r i r' znajdują się ładunki elektryczne H i H' ; potencjały tych kul są V i V' . W odróżnieniu od oznaczeń w [A] i [B]¹ wielkości H i H' , V i V' oraz Q i q' (patrz niżej) mogą być dodatnie lub ujemne. Zamiast wzorów [A 95, A 96, A 152] możemy teraz napisać ogólnie

$$\begin{aligned} H &= SQ - T'q', \\ H' &= S'q' - TQ. \end{aligned} \tag{1}$$

Współczynniki S , S' , T , T' w równaniach (1) określone są wzorami (por. [A] rozdz. 8 i rozdz. 9)

¹ [A] oznacza artykuł autora pt.: „Nowe twierdzenia o polu elektrostatycznym“ (Arch. El. T. IV, Z. 1); [B] oznacza artykuł autora pt.: „Kąty graniczne w polu dwóch jednakowych kul o ładunkach rozmaitych znaków“ (Arch. El. T. V, Z. 2). Liczby umieszczone bezpośrednio przy A lub B oznaczają numer wzoru, na który się powołujemy.

$$S = 1 + \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{\infty} Q_i, \quad S' = 1 + \frac{1}{Q'} \sum_{i=1}^{\infty} Q'_i, \quad (2)$$

$$T = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^{\infty} q_i, \quad T' = \frac{1}{Q'} \sum_{i=1}^{\infty} Q'_i, \quad \frac{T}{T'} = \frac{r'}{r}. \quad (3)$$

Wzory [A 77, 79, 94] podają przybliżone wartości tych współczynników dla jednakowych kul ($r=r'$) i przy $\delta > 3$, przy czym, jak wiadomo,

$$\delta = \frac{D}{r}. \quad (4)$$

Te wzory przybliżone nie nadają się do stosowania w przedziale $2 < \delta < 3$; musimy wówczas obliczać S i T za pomocą wzorów dokładnych (2) i (3) prowadzących do szeregów Ollendorffa [A 47]. W przypadku niejednakowych kul mamy dla tego przedziału

$$S = 1 + \text{sh } \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh } (\mu + \lambda n)}, \quad S' = 1 + \text{sh } \mu' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh } (\mu' + \lambda n)}, \quad (5)$$

$$T = \text{sh } \mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh } \lambda n}, \quad T' = \text{sh } \mu' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\text{sh } \lambda n}, \quad \frac{T}{T'} = \frac{r'}{r}, \quad (6)$$

przy czym (D jest odległością środków kul K, K')

$$\text{ch } \lambda = \frac{k}{2} = \frac{D^2 - r^2 - r'^2}{2rr'}, \quad (7)$$

$$\text{sh } \mu = \frac{r'}{D} \text{sh } \lambda, \quad \text{sh } \mu' = \frac{r}{D} \text{sh } \lambda, \quad (8)$$

$$\text{ch } \mu = \frac{r}{D} + \frac{r'}{D} \text{ch } \lambda = \frac{D^2 + r^2 - r'^2}{2Dr}, \quad \text{ch } \mu' = \frac{r'}{D} + \frac{r}{D} \text{ch } \lambda = \frac{D^2 + r'^2 - r^2}{2Dr}. \quad (9)$$

Jeżeli kule są jednakowe ($r=r'$), to

$$S = S', \quad T = T', \quad \text{ch } \lambda = \frac{1}{2} \delta^2 - 1, \quad \text{ch } \mu = \frac{1}{2} \delta; \quad (10)$$

wprowadzamy w tym przypadku jeszcze oznaczenie

$$g = \frac{S}{T}. \quad (11)$$

W tablicy 1 podano wartości S , T , (S^2-T^2) i g obliczone dla rozmaitych wartości δ . Z tablicy widać, że dla $\delta > 5$ z dużym przybliżeniem można przyjąć

$$g \approx \delta. \tag{12}$$

Tablica 1

Wartości parametrów geometrycznych S , T i g w układzie dwóch jednakowych kul

δ	S	T	S^2-T^2	g
Obliczenie za pomocą wzorów (5) i (6)				
2,1	1,58397	0,88359	1,72823	1,79265
2,2	1,43130	0,72383	1,52469	1,97740
2,4	1,29314	0,57201	1,34502	2,26069
2,6	1,22214	0,48819	1,25530	2,50341
2,8	1,17738	0,43140	1,20012	2,72921
3,0	1,14629	0,38907	1,1626	2,94623
4,0	1,07186	0,26924	1,0764	3,98106
Obliczenie za pomocą wzorów przybliżonych				
3	1,14635	0,38909	1,163	2,946
4	1,07182	0,26924	1,076	3,981
5	1,04356	0,20909	1,045	4,991
6	1,02944	0,17171	1,030	5,995
8	1,01613	0,12705	1,016	7,998
10	1,01020	0,10103	1,0103	9,999
15	1,00448	0,06696	1,0045	15
20	1,00251	0,05014	1,0025	20
50	1,00040	0,02000	1,0008	50
∞	1	0	1	∞

Na rys. 1 przedstawiono graficznie zależność $g = f(\delta)$ w przedziale $2,1 \leq \delta \leq 5$. Najmniejsza (mająca sens fizyczny) wartość δ wynosi $2 + \varepsilon$, gdzie ε jest dowolnie małą liczbą większą od zera. Na rys. 1 przedstawiono również graficznie wartości $\delta - g = f(\delta)$. Z liczb tych korzystamy często podczas obliczeń.

Równania (1) są słuszne niezależnie od tego czy ładunki kul mają znaki jednakowe, czy różne. Ze względu na zależności

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{ i } \quad V' = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0 r'} \tag{13}$$

ładunki Q i q' można nazwać ładunkami potencjałotwórczymi*. Ładunki powyższe znajdują się jak widać z (13) w bezpośrednim związku

* W [B, str. 214] ładunek Q był (niewłaściwie) nazwany ładunkiem swobodnym.

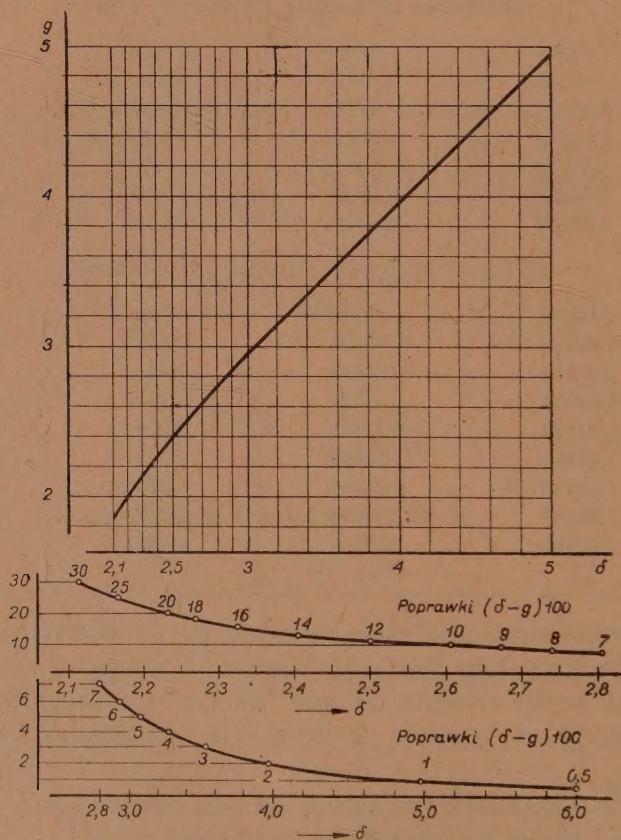
z potencjałami obu kul; jeżeli potencjały te są ustalone przez warunki zewnętrzne, to tym samym wymuszone są w kulach K i K' ładunki Q i q' .

W szczególności znak ładunku Q jest zawsze ten sam, co znak potencjału V . Tak samo zawsze jednakowe są znaki ładunku q' i potencjału V' . Ładunki

$$\Delta = H - Q \quad \Delta' = H' - q' \quad (14)$$

będziemy nazywali ładunkami dodatkowymi.

Ładunki dodatkowe Δ i Δ' powstają przez współdziałanie pól obu kul na skutek superpozycji ładunków wytworzonych w każdej z tych kul przez



Rys. 1. Zależność między parametrami g i δ .

wielokrotne odbicie ładunków potencjałotwórczych od obu sferycznych powierzchni K i K' . Zgodnie z rozważaniami w [A] rozdz. 6 i rozdz. 7 oraz w [B] rozdz. 3 możemy napisać

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum Q_i + \sum Q'_i, \\ \Delta' &= \sum q'_i + \sum q_i, \end{aligned} \quad (15)$$

przy czym Q_i są ładunkami powstałymi przez parzystą liczbę odbić ładunku Q na przemian od powierzchni K' i K , Q'_i zaś są ładunkami powstałymi przez nieparzystą liczbę odbić ładunku q' na przemian od powierzchni K i K' ; zarówno ładunki Q_i jak i Q'_i znajdują się wewnątrz kuli K . Odpowiednio q'_i są ładunkami powstałymi przez parzystą liczbę odbić ładunku q' na przemian od powierzchni K i K' , q_i zaś są ładunkami powstałymi przez nieparzystą liczbę odbić ładunku Q na przemian od powierzchni K' i K ; zarówno ładunki q'_i jak i q_i znajdują się wewnątrz kuli K' .

Cztery szeregi występujące w wyrażeniach (15) są bezwzględnie zbieżne.

Znaki ładunków Δ i Δ' mogą być dodatnie lub ujemne; zdarza się poza tym, że wielkości te mają znaki jednakowe lub różne. W niektórych przypadkach można znaki ładunków Δ i Δ' określić z góry. Załóżmy na przykład, że znaki obu ładunków potencjałotwórczych są różne i w celu łatwiejszego przeprowadzenia rozumowania przyjmijmy, że np. $Q > 0$ i $q' < 0$. Znaki ładunków odbitych zmieniają się przy każdym odbiciu; wobec tego

znaki ładunków	Q_i	(parzysta	liczba odbić	ładunku	Q)	są	+
„	„	Q'_i	(nieparzysta	„	„	„	q') „ +
„	„	q'_i	(parzysta	„	„	„	q') „ -
„	„	q_i	(nieparzysta	„	„	„	Q) „ -

Wynika stąd, że w rozważanym przypadku jest $\Delta > 0$, $\Delta' < 0$.

*Zauważmy jeszcze, że jeżeli na przykład ładunek H jest dany i jeżeli $H > 0$, natomiast z warunków układu wynika, że Δ jest ładunkiem ujemnym, to w tym przypadku ładunek potencjałotwórczy Q jest również dodatni i większy od H .

Jeżeli ładunki H i H' mają znaki odmienne i $|H| > |H'|$, to ładunek H' nazywamy ładunkiem związanym, ładunek $|H+H'|$ zaś — ładunkiem swobodnym. Ładunki związane i swobodne są miarodajne przy ustalaniu pojemności cząstkowych układu dóch kul².

Dzieląc przez siebie stronami równania (1) i wprowadzając oznaczenia

$$\frac{H}{H'} = \chi, \quad \frac{Q}{q'} = \varkappa, \quad (16)$$

znajdujemy

$$\chi = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa - \chi}. \quad (17)$$

² Sprawa tych pojemności była fragmentarycznie wzmiankowana w pracy [A]; do dokładniejszego jej omówienia powrócimy w oddzielnym artykule.

Równanie (17) ma charakter ścisły, jeżeli g obliczone jest za pomocą wzorów (5) i (6); równanie (17) jest równaniem przybliżonym, jeżeli do obliczenia g użyte zostały wyrażenia przybliżone (jak podawaliśmy w [B] rozdz. 10, używane przez nas przybliżenia dla zakresu $\delta > 3$ są bardzo dokładne).

Tablica 2

Wartości parametru δ

$\chi \backslash \infty$	∞	+20	15	10	8	6	5	4	3	2
∞		20	15	10	8	6	5,01	4,02	3,05	2,22
20		∞	59,8	19,9	13,3	8,5	6,6	4,95	3,48	2,34
15			∞	29,8	17,0	9,88	7,4	5,37	3,70	2,38
10				∞	39,5	14,75	9,8	6,5	4,16	2,49
8					∞	23,5	13	7,75	4,61	2,60
6						∞	29	11,5	5,67	2,82
5							∞	19	7	3,05
4								∞	11	3,54
3									∞	5,0
2										∞
-2	2,22	2,13	2,12							
-3	3,05	2,73	2,65	2,50	2,41	2,29	2,28	2,12		
-4	4,01	3,39	3,26	2,98	2,82	2,60	2,48	2,30	2,12	
-5	5	4,05	3,82	3,44	3,21	2,89	2,69	2,47	2,22	
-6	6	4,65	4,35	3,83	3,53	3,13	2,89	2,69	2,29	
-8	8	5,75	5,26	4,51	4,09	3,53	3,20	2,91	2,41	
-10	10	6,7	6,04	5,06	4,51	3,84	3,44	2,98	2,50	
-15	15	8,6	7,53	6,04	5,27	4,35	3,82	3,26	2,65	2,10
-20	20	10,02	8,6	6,70	5,75	4,66	4,06	3,42	2,73	2,12
$-\infty$	∞	20	15	10	8	6	5,01	4,02	3,05	2,22
$\chi \backslash \infty$	-2	-3	-4	-5	-6	-8	-10	-15	-20	$-\infty$
-1,5	4,02	2,47	2,22	2,12						
-2	∞	5,01	3,53	3,05	2,82	2,60	2,50	2,38	2,34	2,22
-3		∞	11	7	5,67	4,61	4,16	3,72	3,50	3,05
-4			∞	19	11,5	7,75	6,50	5,37	4,96	4,02
-5				∞	29	13	9,8	7,4	6,6	5,01
-6					∞	23,5	14,75	9,9	8,5	6
-8						∞	39,5	17,0	13,25	8
-10							∞	29,8	19,9	10
-15								∞	59,8	15
-20									∞	20

Tablica 3

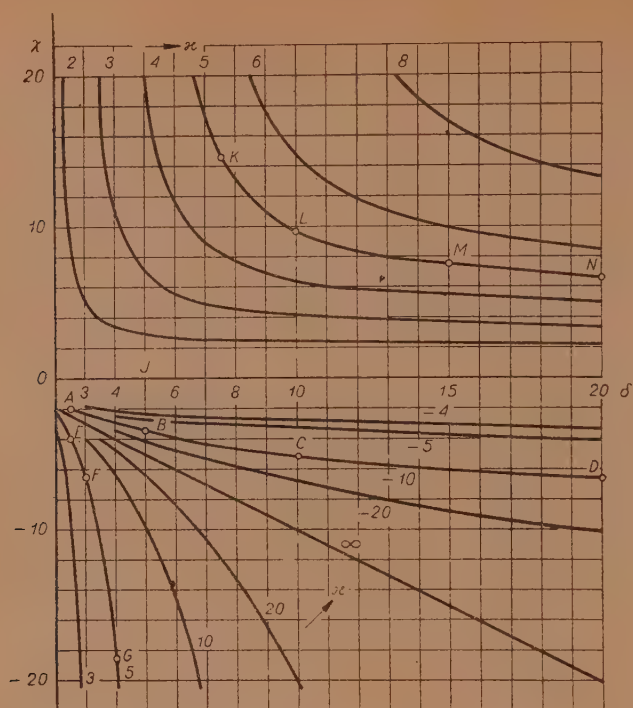
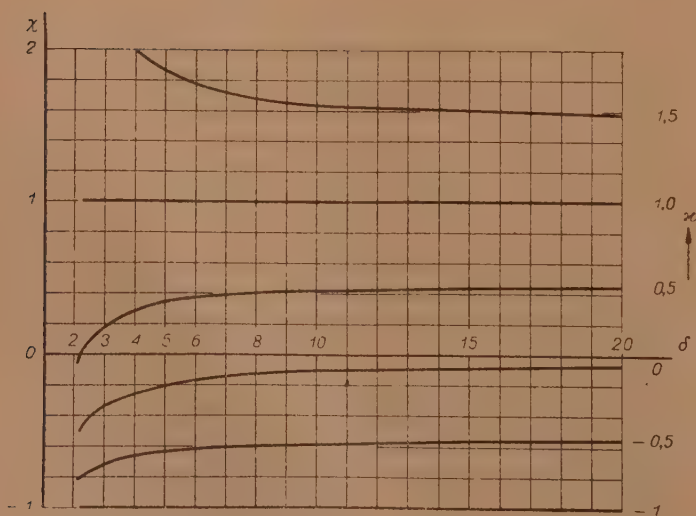
Wartości parametru κ

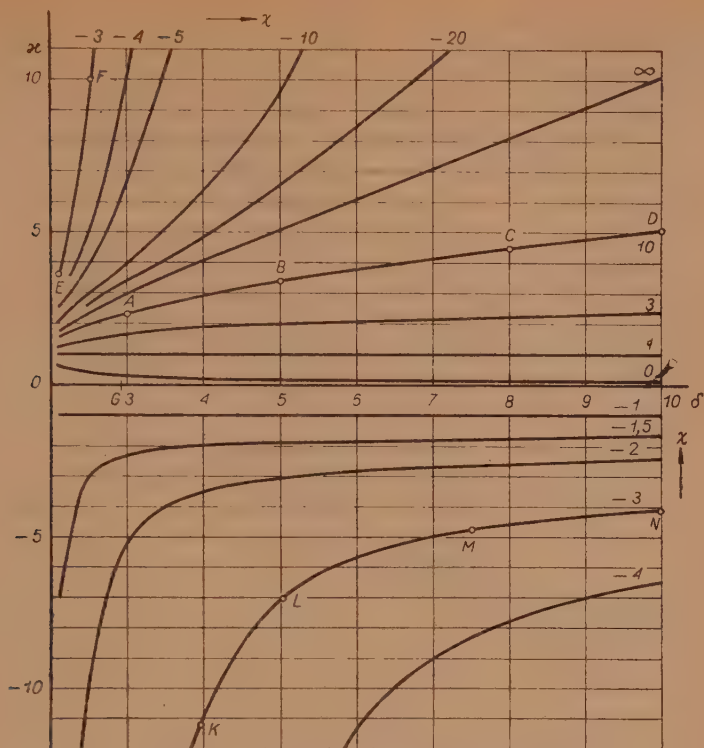
$\kappa \backslash \delta$	2,1	2,5	3	5	7,5	10	20	∞
$+\infty$	+ 1,79	+2,38	+ 2,95	+ 4,99	+ 7,5	+10,0	+20,0	—
+20	1,64 ₅	2,17 ₅	2,57	4,33	5,49	6,70	10,00	20,00
+10	1,61	2,01	2,36	3,40	4,34	5,05	6,70	10,00
+ 7,5	1,55	1,80	2,12	3,08	3,82	4,34	5,49	7,50
+ 5	1,47	1,75	1,98	2,60	3,08	3,40	4,04	5,00
+ 3	1,34	1,51	1,65	2,00	2,24	2,38	2,65	3,00
+ 2	1,21	1,31	1,39	1,57	1,67	1,75	1,87	2,00
+ 1	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
0	0,56	0,42	0,34	0,20	0,13	0,10	0,05	0,00
— 1	— 1,00	—1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00
— 2	—12,28	—9,89	— 5,17	— 3,01	— 2,54	— 2,38	— 2,17	— 2,00
— 3	+ 3,62	+9,91	+145,0	— 7,03	— 4,78	— 4,14	— 3,47	— 3,00
— 5	2,48	4,16	6,70	2400,0	—14,59	— 9,80	— 6,60	— 5,00
— 7,5	2,18	3,08	4,64	14,51	∞	—29,6	—11,92	— 7,50
—10	2,06	3,00	4,03	9,75	29,6	∞	—19,90	—10,00
—20	1,91	2,64	3,40	6,58	11,91	19,90	∞	—20,00
— ∞	1,79	2,38	2,95	4,99	7,50	10,00	+20,00	—

Tablica 4

Wartości parametru κ

$\kappa \backslash \delta$	2,1	2,5	3	5	7,5	10	20	∞
$+\infty$	—1,79	—2,38	—2,95	— 4,99	— 7,50	—10,00	—20,00	—
+20	—1,91	—2,54	—3,40	— 6,58	—11,92	—19,90	∞	+20,00
+10	—2,06	—2,99	—4,04	— 9,76	—29,60	∞	+19,90	+10,00
+ 7,5	—2,18	—3,55	—4,64	—14,51	∞	+29,60	+11,92	+ 7,50
+ 5	—2,48	—4,16	—6,70	—23,95	+14,61	+ 9,80	+ 6,60	+ 5,00
+ 3	—3,61	—9,91	—157,0	+ 7,01	+ 4,78	+ 4,15	+ 3,47	+ 3,00
+ 2	—12,50	+9,90	+5,15	+ 3,00	+ 2,54	+ 2,38	+ 2,17	+ 2,00
+ 1	+1,00	+1,00	+1,00	+ 1,00	+ 1,00	+ 1,00	+ 1,00	+ 1,00
0	—0,56	—0,42	—0,34	— 0,20	— 0,13	— 0,10	— 0,05	0,00
— 1	—1,00	—1,00	—1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00	— 1,00
— 2	—1,21	—1,32	—1,39	— 1,57	— 1,68	— 1,75	— 1,86	— 2,00
— 3	—1,33	—1,51	—1,66	— 2,00	— 2,24	— 2,38	— 2,65	— 3,00
— 5	—1,47	—1,75	—1,98	— 2,60	— 3,08	— 3,40	— 4,04	— 5,00
— 7,5	—1,55	—1,91	—2,12	— 3,08	— 3,82	— 4,34	— 5,49	— 7,50
—10	—1,60	—2,01	—2,35	— 3,40	— 4,34	— 5,05	— 6,67	—10,00
—20	—1,69	—2,18	—2,56	— 4,03	— 5,50	— 6,67	—10,02	—20,00
— ∞	—1,79	—2,38	—2,95	— 4,99	— 7,50	—10,00	—20,00	—

Rys. 2a. Rodzina krzywych $\chi = f(\delta)$ przy różnych ζ .Rys. 2b. Rodzina krzywych $\chi = f(\delta)$ przy $\zeta = -1 \div 1,5$.

Rys. 3. Rodzina krzywych $\kappa=f(\delta)$ przy różnych χ .

Trzy współczynniki g, χ, κ powiązane są wzajemnie zależnością (17) i nazywają się parametrami podstawowymi³ pola dwóch jednakowych kul. Z równania (17) wynika jeszcze

$$\kappa = \frac{g\chi + 1}{g + \chi}, \quad (18)$$

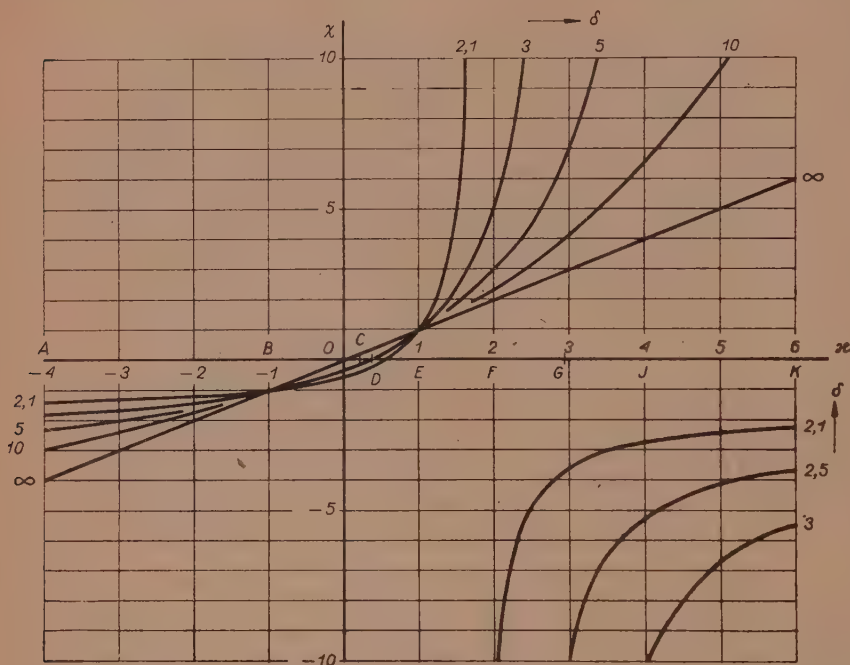
$$g = \frac{\chi\kappa - 1}{\chi - \kappa}. \quad (19)$$

Zakres zmienności parametrów κ i χ jest od $-\infty$ do $+\infty$.

Równania (17) ÷ (19) pomimo swej prostej postaci nie są zbyt przejrzyste, jeśli chodzi o przedstawienie sobie wzajemnej zależności między parametrami podstawowymi. Aby tę przejrzystość uzyskać, obliczenia zestawiono w tablicach 2, 3 i 4, w których jako zmienna zależna występuje kolejno każdy z parametrów. Graficzne przedstawienie tych zależności podano w wykresach na rys. 2, 3 i 4, gdzie rodziny krzywych odpowiadają zależnościom zachodzącym

³ Podstawowe znaczenie parametrów δ, χ, κ wynika również z [B].

- A. przy zachowaniu stałych potencjałów obu kul i zmianie ich odległości lub ładunków (rys. 2a i 2b),
 B. przy stałych ładunkach obu kul i zmianie ich odległości lub ich potencjałów (rys. 3),
 C. przy stałej odległości obu kul i zmianie ich potencjałów lub ładunków (rys. 4).



Rys. 4. Rodzina krzywych $\chi=f(\kappa)$ przy różnych δ .

2. ZALEŻNOŚCI PRZY STAŁYCH POTENCJAŁACH

Wszystkie krzywe przedstawione na rys. 2a i 2b mają punkty w nieskończoności. Punkty na osiach współrzędnych, dla których parametry χ lub κ przybierają wartości nieskończenie wielkie, będziemy nazywali punktami krytycznymi ładunków lub potencjałów. W rozważanym przypadku punktami krytycznymi ładunków są punkty na osi δ odpowiadające wartościom $g=\kappa$ (por. wzór 17). Proste równoległe do osi współrzędnych, przechodzące przez punkty krytyczne, są asymptotami krzywych z rys. 2a.

Wartościom κ z zakresu $\kappa \leq 1,79$ odpowiadają krzywe ciągłe składające się z jednej gałęzi⁴; przy tym krzywe dla κ z zakresu $\frac{1}{1,79} = 0,557 < \kappa \leq 1,79$ przebiegają całkowicie w pierwszej ćwiartce układu współrzędnych (δ, χ) ,

⁴ Liczba 1,79 wynika stąd, że w niniejszej pracy ograniczono dolną wartość parametru δ liczbą 2,1, której odpowiada wartość $g=1,79$.

natomiast krzywe odpowiadające wartościom κ z zakresu $\kappa < 0,557$ przecinają oś odciętych, to znaczy przebiegają w I i w IV ćwiartce (por. rys. 2b).

Wartościom κ z zakresu $\kappa > 1,79$ odpowiadają krzywe składające się z dwóch gałęzi. Na rys. 2a przedstawione są tylko dwie takie pełne krzywe dla wartości $\kappa = 3$ i $\kappa = 5$. Dla wartości $\kappa > 8$ górna gałąź jest bardzo oddalona od osi rzędnych i nie mieści się na rysunku; natomiast dla wartości κ z zakresu $1,79 < \kappa < 3$ dolne gałęzie odnośnych przebiegają nadzwyczaj stromo i dlatego nie są narysowane.

Granice między częścią płaszczyzny wypełnioną krzywymi ciągłymi i częścią płaszczyzny wypełnioną krzywymi składającymi się z dwóch gałęzi stanowi ciągła krzywa $\kappa = \pm \infty$ położona w IV ćwiartce. Krzywą tę można fizycznie zrealizować przez nadanie potencjałowi kuli K' wartości zero.

Z krzywych wykresu trudno jest uzmysłowić sobie przebieg zależności między ładunkami całkowitymi i dodatkowymi oraz napięciami powstającymi przy zmianie odległości obu kul. Najlepiej uświadomimy sobie te przebiegi na przykładach liczbowych. Przykłady takie przedstawiono w tablicy 5 oraz na rys. 5a i 5b.

Górna część tablicy 5 (punkty A, B, C, D) dotyczy przypadku, gdy na kulach utrzymywane są stałe potencjały $V = +100$ woltów, $V' = -10$ woltów, to znaczy gdy $\kappa = -10$ (por. także rys. 2a). Ładunki potencjałotwórcze obliczamy z wzorów (13); ze względu na to, że V i V' są stałe podczas zmiany δ , również i Q , q' zachowują przy tym wartości niezmiennie. To samo można powiedzieć o napięciu $u_{kk'}$, między kulami

$$U_{kk'} = V - V'. \quad (20)$$

We wszystkich przykładach rozważanych w niniejszej pracy dla wygody obliczeń zakładamy, że kule K i K' mają średnice 18 mm; wtedy

$$4\pi\epsilon_0 r = 1 \text{ pF}$$

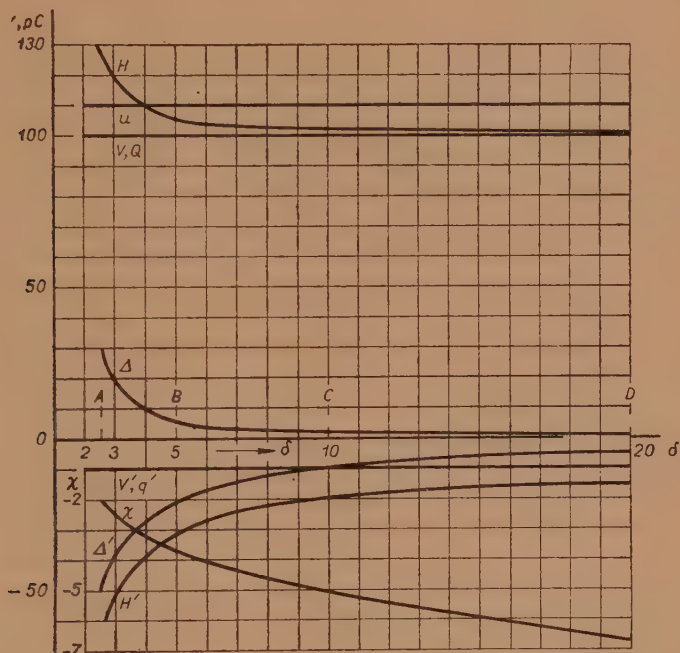
i wartości liczbowe potencjałów V , V' wyrażonych w woltach równają się wartościom liczbowym ładunków Q , q' wyrażonych w picokulombach.

Ładunki łączne H , H' obliczamy ze wzorów (1), ładunki dodatkowe Δ , Δ' — ze wzorów (14). Jak już wzmiankowaliśmy w rozdz. 1, ładunki Δ mają w rozważanym obecnie przypadku zawsze znaki dodatnie, ładunki Δ' — znaki ujemne. Przy zwiększaniu parametru δ między kulami wzajemny wpływ stałych ładunków Q , q' umieszczonych na tych kulach znacznie maleje, w związku z tym maleją również i bezwzględne wartości ładunków dodatkowych. Zjawisko to oddziałuje na wartości ładunków łącznych H , H' , których wartości bezwzględne podczas tej zmiany wykazują również tendencję monotonicznie malejącą.

Tablica 5

Punkt	δ	α	χ	Kula K				Kula K'				$U_{kk'}$	Uwagi
				V	Q	H	Δ	V'	q'	H'	Δ'		
				V	pC	pC	pC	V	pC	pC	pC	V	
A	2,5	-10	-2	+100	+100	+131,1	+31,1	-10	-10	-65,6	-55,6	110	Obszar anomalii influencia
B	5	"	-3,4	"	"	+106,45	+6,45	"	"	-31,35	-21,35	"	
C	10	"	-5,05	"	"	+102,03	+2,03	"	"	-20,2	-10,2	"	
D	20	"	-6,7	"	"	+100,75	+0,75	"	"	-15,0	-5	"	
E	2,1	+5	-2,48	+100	+100	+140,7	+40,7	+20	+20	-56,7	-76,7	80	
F	3	"	-6,7	"	"	+106,8	+6,8	"	"	-16,0	-36,0	"	
G	4	"	-18,53	"	"	+101,8	+1,8	"	"	-5,5	-25,5	"	
J	5,01	"	∞	"	"	+100,2	+0,2	"	"	0	-20	"	
K	7,5	"	+14,61	"	"	+99,2	-0,8	"	"	+6,6	-13,4	"	
L	10	"	+9,8	"	"	+99,1	-0,9	"	"	+10,1	-9,9	"	
M	15	"	+7,4	"	"	+99,1	-0,9	"	"	+13,4	-6,6	"	
N	20	"	+6,6	"	"	+98,8	-1,2	"	"	+15,0	-5	"	

W dolnej części tablicy 5 (punkty E do N) oraz na rys. 5b przedstawiono przebiegi zmienności odnośnych wielkości przy założeniu $\kappa=5$ (por. rys. 2a). Dla punktów E, F, G zawartych w przedziale $\delta < 5,01$ ładunek H' jest — jak wynika z obliczenia — ujemny; punkt J odpowiada



Rys. 5a. Przebieg zależności przedstawionych w tablicy 5 (A÷D).

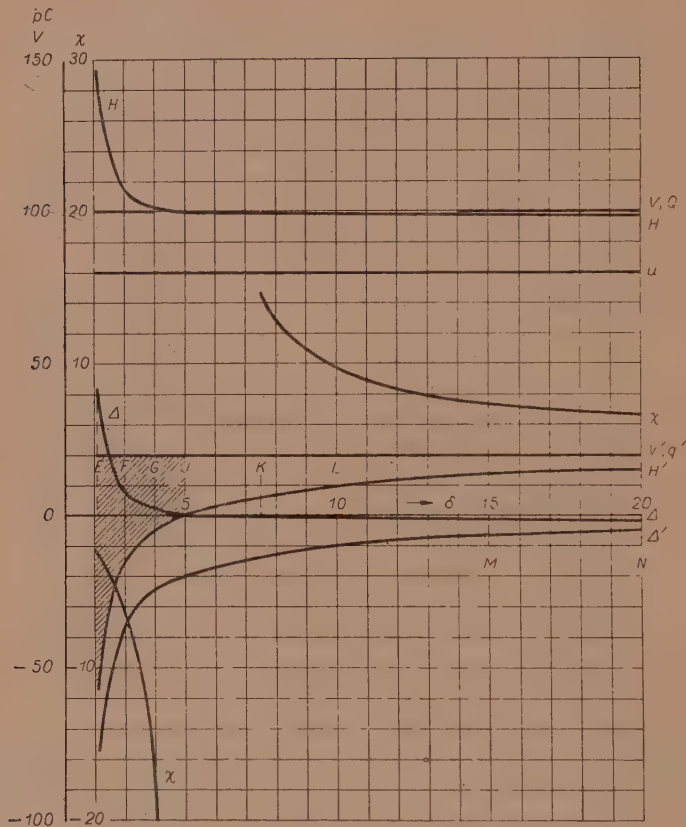
wartości $\delta = 5,01$, co na zasadzie wzoru (17) daje wartość $\chi = \infty$, czyli $H' = 0$. Dla punktów $\delta > 5,01$ krzywa H' przebiega ponad osią odciętych. Na rys. 2b przedstawiona jest również krzywa przebiegu parametru χ ; krzywa ta w przedziale od E do J położona jest w dolnej ćwiartce.

Jeżeli część krzywej $\chi = f(\kappa)$ dla dodatnich wartości κ przebiega pod osią odciętych, to wyznacza ona stany, w których dodatnim wartościom κ odpowiadają ujemne wartości χ ; oznacza to, że potencjał jednej z kul ma znak odmienny od znaku ładunku tej samej kuli. Stan taki będziemy nazywali *anomalią*.

Jeśli własność elektrostatycznej równowagi (patrz [A] rozdz. 11d i g) i możliwość — w razie spełnienia określonych warunków — przyciągania się dwóch kul z ładunkami jednego znaku nazwać anomalią układu kul $++$ (lub $--$), to stan, o którym mowa wyżej, można analo-

gicznie nazwać anomalią układu kul $+-$ ⁵. Zakres ten na rys. 5b jest zakreskowany.

Fizycznie stan anomalii (w przypadku $\kappa > 1,79$) daje się wytłumaczyć za pomocą drugiego równania (1), które bezpośrednio odpowiada naszym fizycznym wyobrażeniom. Zgodnie z równaniami (1), (14) i (15) łączny



Rys. 5b. Przebieg zależności przedstawionych w tabelcy 5 (E÷N).

ładunek H' kuli K powstaje przez superpozycję ładunku potencjałotwórczego q' i ładunku dodatkowego Δ'

$$H' = q' + \Delta' = q' + \sum q_i - \sum q_i = q' + (S-1)q' - TQ = Sq' - TQ. \quad (21)$$

Zakładamy, że w ostatnim wyrażeniu wielkości q' i Q są stałe i dodatnie; natomiast współczynniki S i T zależą od δ , przy czym S jest zawsze

⁵ Możliwość istnienia tej anomalii nie jest znana w literaturze. Przeciwnie, rozpowszechniony jest pogląd, że ładunek ciała ma zawsze ten sam znak co jego potencjał. Jak wiemy, twierdzenie to jest słuszne tylko w odniesieniu do ładunków potencjałotwórczych.

większe od 1, T jest zawsze mniejsze od 1 i stosunek $g = \frac{S}{T}$ wykazuje przy zmniejszaniu δ tendencję monotonicznie malejącą (por. tabl. 1).

Jako punkt wyjściowy naszych rozważań założmy tak wielką odległość między kulami, że

$$Sq' > TQ \quad \text{albo} \quad g > \kappa;$$

możemy to zawsze osiągnąć, ponieważ dla dostatecznie dużych wartości δ współczynnik T może być dowolnie bliski zeru albo współczynnik g — dowolnie wielki. W tym przypadku będzie zatem $H' > 0$. Jeżeli teraz będziemy kule do siebie zbliżali, to g staje się coraz mniejsze, albo, co jest równoznaczne, coraz mniejsza staje się różnica między ładunkami Sq' i TQ . Dla pewnej wartości δ_1 będzie $g_1 = \kappa$ i wtedy

$$Sq' = TQ. \quad (22)$$

Wartość δ_1 odpowiada punktowi J na rys. 5b, przy czym na skutek założenia $\kappa > 1,79$ mamy $\delta_1 > 2,1$, czyli δ_1 znajduje się wewnątrz rozważanego przez nas zakresu.

Jeżeli teraz dalej zbliżać do siebie obie kule, to wtedy będzie

$$Sq' < TQ,$$

czyli

$$H' < 0.$$

Jeżeli powrócimy teraz do pierwszego równania (1), to ze względu na $\kappa > 1,79$ mamy tu $Q > q'$ (Q i q' są dodatnie zgodnie z założeniem). Wynika stąd, że SQ jest zawsze większe od $T \cdot q'$ i wobec tego H jest w tym przypadku zawsze dodatnie.

Znaleźliśmy zatem, że dla rozważanego zakresu jest $H' < 0$ i $q' > 0$, czyli zachodzi tu stan anomalii.

Jak widzieliśmy wyżej, punkt J wykresu z rys. 5b odpowiada warunkowi $H' = 0$ albo $\chi = \infty$; stan przedstawiony przez ten punkt nazywa się influencją elektrostatyczną ładunku H kuli K na kulę K' .⁶ Jak wynika z (18) w punkcie J jest

$$\kappa = g.$$

Pewne zainteresowanie może budzić jeszcze przebieg zależności przy $\kappa = +1$ oraz przy $\kappa = -1$. Z wzoru (17) i z rys. 2b znajdujemy dla tych danych $\chi = +1$ i $\chi = -1$, to znaczy

$$\text{dla } \kappa = +1 \quad \text{jest} \quad Q = q' \quad \text{i} \quad H = H' = (S - T)Q = \mu_H Q,$$

$$\text{dla } \kappa = -1 \quad \text{jest} \quad Q = -q \quad \text{i} \quad H = -H' = (S + T)Q = \nu_H Q.$$

⁶ Influcja elektrostatyczna będzie szczegółowiej omówiona w oddzielnym artykule.

Przebieg współczynników μ_H i ν_H podany jest w [A] na rys. 32 [A str. 126] i na rys. 30 [A str. 123]. Ładunek H przy wzroście δ dla $\kappa = +1$ wykazuje tendencję monotonicznie wzrastającą, dla $\kappa = -1$ — tendencję monotonicznie malejącą. Jest to zrozumiałe również i z fizycznego punktu widzenia. Przy potencjałach o tej samej wartości bezwzględnej i tym samym znaku $+$ ładunki dodatkowe obu kul mają znaki ujemne, co wynika stąd, że na przykład w pierwszym równaniu (15) jest

$$Q_1 < |Q'_1|, Q_2 < |Q'_2|, Q_3 < |Q'_3| \dots Q_i < |Q'_i|, Q_i > 0, Q'_i < 0,$$

bowiem Q_1 powstaje z dwukrotnego odbicia ładunku Q , podczas gdy Q'_1 powstaje z jednorazowego odbicia takiego samego ładunku $q' = Q$; Q_2 powstaje z czterokrotnego odbicia ładunku Q , podczas gdy Q'_2 tylko z trójkrotnego odbicia itd. Podobnie mamy

$$q'_1 < |q_1|, q'_2 < |q_2|, \dots q'_i < |q_i|, q'_i > 0, q_i < 0.$$

Wynika stąd następnie, że ładunki łączne H są mniejsze od ładunków potencjałotwórczych Q . Jeżeli δ wzrasta, to wartości bezwzględne ładunków dodatkowych zmniejszają się; dla $\delta \rightarrow \infty$ mamy $\lim \Delta = 0$ i wartości H dążą, zwiększając się, do wartości Q .

Jeżeli potencjały obu kul są $V = +V_0$ i $V' = -V_0$ (przy czym potencjały te odpowiadają ładunkom $Q = +Q_0$ i $q' = -Q_0$), to łatwo można wykazać, że dla skończonych δ jest $\Delta > 0$ oraz $\Delta' < 0$, skąd $H > Q_0$ i $H' < Q_0$. Mamy tu także $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \Delta = 0$ i zatem przy wzrastaniu δ do ∞ wartości bezwzględne ładunków łącznych dążą, zmniejszając się, do wartości Q_0 .

Mówiliśmy tu o przebiegach zachodzących przy oddalaniu lub przybliżaniu obu kul K i K' . Należy dodać, że ponieważ chcemy tu uwzględnić tylko pola elektrostatyczne, przeto ruchy te muszą się odbywać z tak małą prędkością, aby można było pominąć ich skutki magnetyczne.

3. ZALEŻNOŚCI PRZY STAŁYCH ŁADUNKACH

Rodzina krzywych przedstawiona na rys. 3 składa się z linii, dla których stosunek χ jest wartością stałą. Linie te, podobnie jak linie na rys. 2a, mają dwojaki charakter. Wartościom $\chi < -1,79$ odpowiadają krzywe składające się z dwóch gałęzi. Punktami krytycznymi potencjału są punkty na osi δ odpowiadające wartościom $\delta = g$ i prosta, poprowadzona przez każdy taki punkt równolegle do osi rzędnych, jest asymptotą obu gałęzi odnośnej krzywej $\chi = g$.

Na rys. 3 nie przedstawiono krzywej odpowiadającej wartości $\chi = -2$, położonej w pierwszej ćwiartce, ponieważ przybiega ona nader stromo; nie pokazano również na rysunku krzywych dla $\chi < -4$ znajdujących się w czwartej ćwiartce, ponieważ są one zbyt odległe od osi rzędnych i szczupłość miejsca nie pozwala na ich uwidocznienie.

Krzywe ciągle odpowiadające wartościom χ z przedziału $-1 < \chi < 0$ przecinają oś odciętych; krzywych tych nie będziemy analizować, ponieważ przez przemianowanie kul K i K' przypadki te sprowadzić można do zakresu $-1 > \chi$.

Specjalne znaczenie mają krzywe ciągle odpowiadające wartościom $\chi = \pm \infty$ i $\chi = 0$. Pierwsza z nich jest równoważna związkowi $\kappa = g$ (por. wzór 18). Punkty jej odpowiadają influencji elektrostatycznej ładunku H kuli K na kulę K' . Druga krzywa równoważna jest zależności $\kappa = \frac{1}{g}$ i jej punkty odpowiadają influencji ładunku H' kuli K' na kulę K .

W tablicy 6 przedstawione zostały rezultaty obliczeń dwóch przykładów liczbowych. W pierwszym przykładzie (punkty A do D) założono, że na kulach znajdują się niezmiennie ładunki łączne $H = 100$ pC i $H' = 10$ pC ($\chi = 10$).

W celu obliczania ładunków Q i q' rozwiązujemy równania (1) względem tych wielkości; w przypadku ogólnym otrzymujemy

$$Q = \frac{HS' + H'T'}{SS' - TT'}, \quad q' = \frac{HT + H'S}{SS' - TT'} \quad (23)$$

albo w przypadku dwóch kul jednakowych:

$$Q = H' \frac{\chi S + T}{S^2 - T^2}, \quad q' = H' \frac{\chi T + S}{S^2 - T^2}. \quad (24)$$

Napięcie $u_{KK'}$, można obliczać ze wzoru

$$u_{KK'} = \frac{H - H'}{4\pi\epsilon_0 r (S + T)}, \quad (25)$$

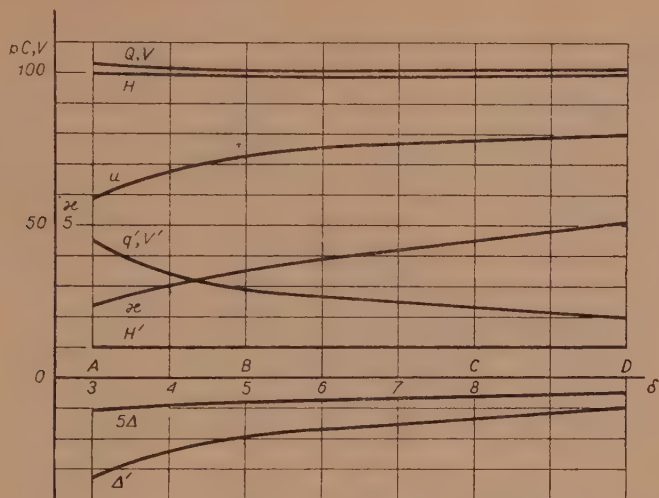
wygodniej jest jednak najpierw obliczyć potencjały V , V' i potem korzystać z (20).

Przebiegi rozmaitych interesujących nas wielkości podczas zmiany δ przedstawia graficznie rys. 6a (patrz także rys. 3). Komentowanie tych przebiegów za pomocą wyobrażeń fizycznych jest tu znacznie trudniejsze niż w rozdziale 2; we wzorach (15) ładunki Δ i Δ' znajdują się w bezpośredniej zależności od Q i q' , a zatem znając ładunki potencjałotwórcze możemy bezpośrednio wnioskować o wartościach ładunków dodatkowych, stąd zaś dalej o ładunkach łącznych. W rozważanym obecnie przypadku dane są ładunki H i H' będące sumami dwóch zależnych od siebie nieznanych składników. Aby pomimo to wytworzyć sobie pewien obraz fizyczny zachodzących zjawisk, w pierwszym przybliżeniu można założyć, że $Q \approx H$ i $q' \approx H'$, potem zaś drogą kolejnych coraz dokładniejszych przybliżeń

Tablica 6

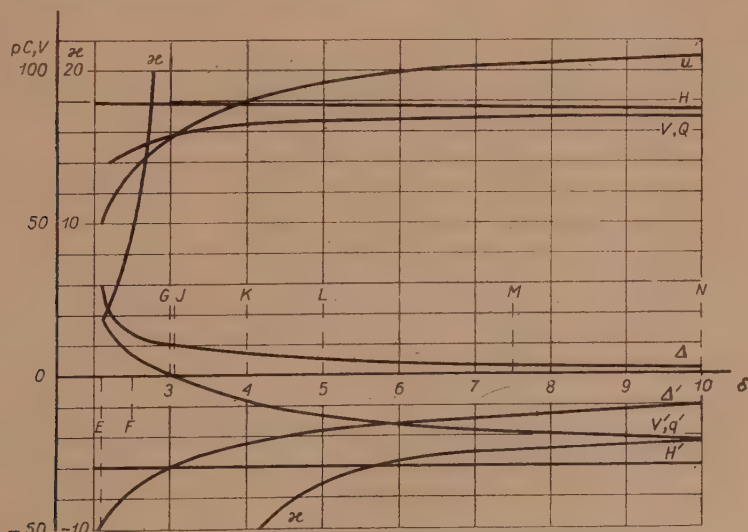
Punkt	δ	κ	χ	Kula K						Kula K'				$U_{K'}$	Uwagi
				V	Q	H	A	pC	V	V'	q'	H'	A'		
				V	pC	pC	pC			V	pC	pC	pC	V	
A	3	2,36	10	+102,0	+102,0	+100	— 2,0		+43,2	+43,2	+10	—33,2	58,8		
B	5	3,40	"	+101,9	+101,9	"	— 1,9		+30	+30	"	—20,0	71,9		
C	8	4,50	"	+101,3	+101,3	"	— 1,3		+22,5	+22,5	"	—12,5	78,8		
D	10	5,05	"	+101,0	+101,0	"	— 1,0		+20	+20	"	—10,0	81,0		
E	2,1	+ 3,62	—3	+ 67,2	+ 67,2	+ 90	+22,8		+18,6	+18,6	—30	—48,6	48,6		
F	2,5	+ 9,9	"	+ 75,0	+ 75,0	"	+15,0		+ 7,56	+ 7,56	"	—37,56	67,4		Obszar anomalii
G	3,0	+ 14,5	"	+ 78,6	+ 78,6	"	+11,4		+ 0,54	+ 0,54	"	—30,54	78,1		
J	3,05	∞	"	+ 79,2	+ 79,2	"	+10,8		0	0	"	—30	79,2		
K	4	—11,16	"	+ 81,4	+ 81,4	"	+ 8,6		— 7,35	— 7,35	"	—22,65	88,7 ₅		
L	5	— 7,03	"	+ 83,7	+ 83,7	"	+ 6,3		—11,91	—11,91	"	—18,09	95,6		
M	7,5	— 4,78	"	+ 86,1	+ 86,1	"	+ 3,9		—18,0	—18,0	"	—12,0	104,1		
N	10	— 4,14	"	+ 87,0	+ 87,0	"	+ 3,0		—21,06	—21,06	"	— 8,94	108,1		

ulepszać obraz otrzymany z pierwszego przybliżenia. Metody powyższej nie będziemy tu stosować szczegółowo, ale podane niżej rozważania należy w ten właśnie sposób rozumieć.



Rys. 6a. Przebieg zależności przedstawionych w tablicy 6 (A÷D).

Jak widać z wykresu na rys. 6a i z obliczeń tabl. 6 ładunki dodatkowe kuli K są o wiele mniejsze od ładunków dodatkowych kuli K'; wynika to stąd, że wpływ dużego ładunku H na kulę K' jest znacznie większy niż wpływ małego ładunku H' na kulę K.



Rys. 6b. Przebieg zależności przedstawionych w tablicy 6 (E÷N).

Oba ładunki Δ i Δ' mają znaki ujemne; można to łatwo zrozumieć wypisując wzory

$$\begin{aligned}\Delta' &= \sum q'_i + \sum q_i, \\ \Delta &= \sum Q_i + \sum Q'_i.\end{aligned}\tag{26}$$

W pierwszym wzorze ładunek q_i powstał z jednorazowego odbicia dużego ładunku dodatniego Q , ładunek q'_i — z dwukrotnego odbicia ładunku ujemnego q' o małej wartości bezwzględnej; wynika stąd, że oba te ładunki są ujemne i to samo można powiedzieć o ładunkach q_i oraz q'_i . Otrzymuje się stąd $\Delta' < 0$, przy czym wartość $|\Delta'|$ jest stosunkowo duża.

Nieco bardziej zawiłe jest wykazanie, że $\Delta < 0$. Zadowolimy się rozumowaniem ogólnikowym, dającym rezultat przybliżony.

Ładunek Q_1 powstaje przez dwukrotne odbicie dużego ładunku Q , ładunek Q'_1 — przez jednorazowe odbicie mniejszego ładunku q' ; składnik ostatni uzyskuje jednak większą wartość bezwzględną dlatego, że ładunek q' jest (ze względu na ujemną wartość Δ') znacznie większy od ładunku H' . W rezultacie Q_1 jest mniejsze od Q'_1 , jakkolwiek różnica jest tu nieznaczna. To samo dotyczy dalszych elementów obu ciągów.

W związku z nieznacznymi wartościami ładunków Δ rozbieżność między ładunkiem potencjałotwórczym Q i ładunkiem łącznym H jest niewielka (przy czym $Q > H$).

W miarę oddalania się kul ładunek q' zmniejsza się nieco szybciej niż ładunek Q , ponieważ daje się tu silniej odczuwać malejący wpływ oddalającego się dużego ładunku H .

Stosunek κ potencjałów rośnie monotonicznie wraz z wzrostem δ zwiększa się również przy tym napięcie między kulami, co odpowiada naszym fizycznym wyobrażeniom.

W dolnej części tablicy 6 (punkty E do N) i na rys. 6b przedstawiono drugi przykład odpowiadający przebiegowi wzdłuż krzywej $\chi = -3$ (por. rys. 3) przy założeniach $H = +90$ pC; $H' = -30$ pC.

Znaki i charakterystyczne przebiegi ładunków Δ i Δ' dają się i tu wytłumaczyć podobnie jak w przykładzie poprzednim. Szczególnie interesująca jest tu krzywa potencjału V' , która w punkcie $\delta = 3,05$ przecina oś rzędnych. Punkt ten zgodnie z drugim równaniem (24) odpowiada wartości $\chi = -g$; z wzoru (18) wynika stąd $\kappa = \infty$.

W związku z powyższym można stwierdzić, że przy zmniejszaniu δ poza punkt J wchodzimy w obszar anomalii rozpościerający się aż do końca obranego zakresu, to jest do $\delta = 2,1$.

Również łatwo można stwierdzić, że anomalia $+$ — nie istnieje przy przebiegach o stałych ładunkach jednakowego znaku.

4. ZALEŻNOŚCI PRZY STAŁEJ ODLEGŁOŚCI KUL

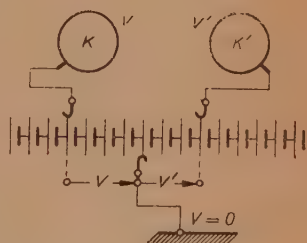
Analiza zależności między κ i χ przy stałej wartości δ prowadzi do wykresów, które są — jak się wydaje — najbardziej instrukcyjne ze wszystkich dotychczasowych. Jak widać z rys. 4, przedstawiającego ten przypadek, każda krzywa należąca do rodziny krzywych δ składa się z dwóch gałęzi. Jedna z nich położona jest w pierwszej, trzeciej i czwartej ćwiartce, druga — tylko w ćwiartce czwartej. Punktami krytycznymi ładunku są punkty $\kappa=g$, punktami krytycznymi potencjału — punkty $\chi = -\frac{1}{g}$. Punkt krytyczny $\chi = \infty$ daje się fizycznie zrealizować przez doprowadzenie do zera łącznego ładunku kuli K' , punkt krytyczny $\kappa = \infty$ można osiągnąć przez uziemienie kuli K' lub też przez nadanie ładunkowi łącznemu kuli K' wartości g krotnie większej niż ładunek łączny kuli K , przy czym oba te ładunki muszą mieć znaki różne.

Z rys. 4 wynika, że istnieją tu dwa zakresy, w których zachodzą anomalie $+-$;

1. zakres między wartościami $\kappa=0$ i $\kappa = \frac{1}{g}$ (punkt $\kappa = \frac{1}{g}$ odpowiada przecięciu odnośnej krzywej z osią odciętych); anomalie tę będziemy nazywali **anomaliami wewnętrzną**;
2. zakres wartości $\kappa > g$; anomalie tę będziemy nazywali **anomaliami zewnętrzną**.⁷

W tablicy 7 podano rezultaty obliczeń dwóch przypadków szczególnych. Pierwszy przykład obejmuje punkty od A do E. Założeniem tego przykładu jest, że odległość kul wynosi $\delta=3$ i że wartość parametru κ wzrasta od -4 do 1 . Przyjęto przy tym, że potencjał V' kuli K' jest stały i utrzymuje się na wysokości 50 woltów. W przykładzie drugim obejmującym punkty od E do K założono, że przy tej samej odległości kul ($\delta=3$) parametr κ wzrasta dalej od wartości $+1$ do wartości $+6$; założono tu jednak, że potencjał V kuli K utrzymywany jest podczas tego przebiegu na stałym poziomie (50 V), natomiast potencjał V' kuli K' odpowiednio się zmniejsza. Założenie to spowodowane jest chęcią fizycznej realizacji punktu krytycznego $\kappa=2,95$ ładunku.

Zmiany potencjałów obu kul można osiągnąć stosując schemat połączeń z rys. 8.



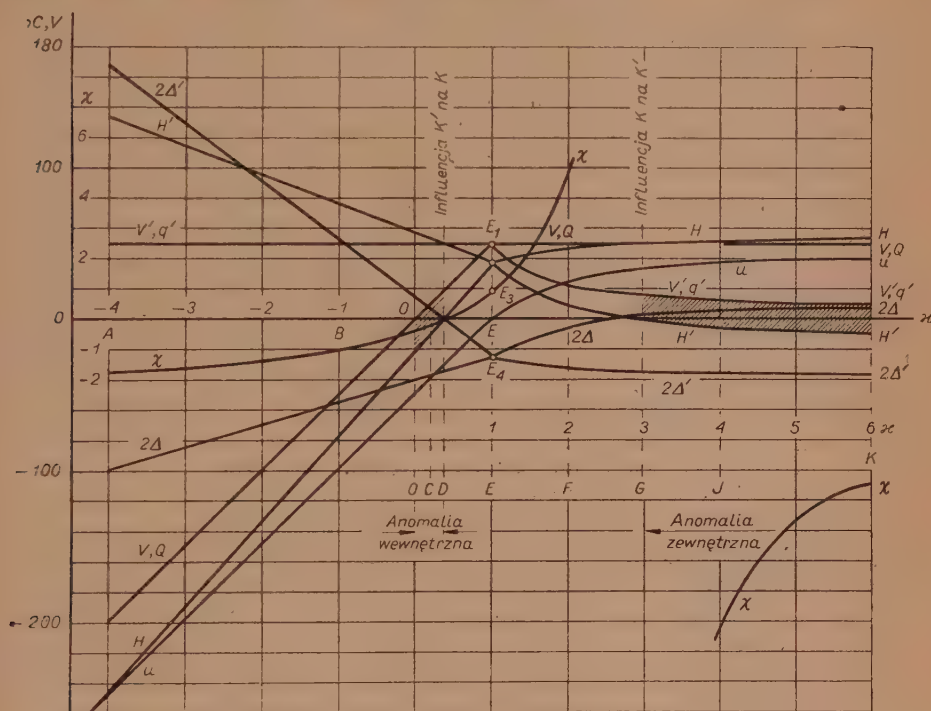
Rys. 7. Przebieg zależności przedstawionych w tablicy 7.

⁷ Anomalia wewnętrzna zachodzi na ograniczonym odcinku osi δ , anomalia zewnętrzna — na odcinku nieograniczonym.

Tablica 7

Punkt	δ	\approx	χ	Kula K				Kula K'				Uwagi	
				V	Q	H	Δ	V'	q'	H'	pC	$U_{KK'}$	V'
				V	pC	pC	pC	V	pC	pC	pC		
A	3	-4	-1,84	-200	-200	-248,7	-48,7	+50	+50	+135,1	+85,1	-250	
B	"	-1	-1	-50	-50	-76,8	-26,8	"	"	+76,8	+26,8	-100	
O	"	0	-0,34	0	0	-19,5	-19,5	"	"	+57,3	+7,3	-50	Obszar anomalii
C	"	+0,2	-0,15	+10	+10	-8	-18	"	"	+53,4	+3,4	-40	
D	"	+0,34	0	+17	+17	0	-17	"	"	+50,7	+0,7	-33	Influencja K' na K
E	"	+1	+1	+50	+50	+37,8	-12,2	"	"	+37,8	-12,2	0	
F	"	+2	+5,15	"	"	+47,6	-2,4	+25	+25	+9,2	-15,8	+25	
G	"	+2,95	∞	"	"	+50,7	+0,7	+17	+17	0	-17,0	+33,1	Influencja K na K'
J	"	+4	-10,3	"	"	+52,5	+2,5	+12,5	+12,5	-	-17,6	+37,5	Obszar anomalii
K	"	+6	-5,5	"	"	+54,1	+4,1	+8,3	+8,3	-9,9	-18,2	+41,5	

Na rys. 7 przedstawiono wykreślenie przebiegi odnośnych wielkości. Lewa część tego rysunku (od osi $E E_1$) dotyczy pierwszego przykładu, prawa część (od osi $E E_1$) — przykładu drugiego.



Rys. 8. Schemat połączeń do tablicy 7.

Linie dla H i H' w lewej połowie rysunku są, ze względu na charakter krzywej $\delta=3$ z rys. 4, bardzo zbliżone do linii prostych. Punkt 0 — to początek układu współrzędnych, punkt C odpowiada dowolnie obranej wartości parametru $\kappa=0,2$, punkt D odpowiada wartości $\kappa = \frac{1}{g} = \frac{1}{2,95} = 0,34$, dla której wg równania (17) jest $\chi=0$.

Linie dla V i Q oraz linie dla V' , q' i u są liniami prostymi na skutek poczynionych założeń. Jeżeli przyjmujemy jak wyżej, że i linie dla H i H' są prostymi, to wynika stąd również i prostoliniowość przebiegów Δ i Δ' . W punkcie 0 linia V przecina oś odciętych i stąd przechodząc przez ten punkt (z lewej strony ku prawej) wkraczamy w obszar anomalii wewnętrznej, w którym potencjał kuli K jest dodatni, podczas gdy jej ładunek H jest ujemny. Drugim punktem granicznym tego obszaru jest punkt D , w którym ładunek H , przechodząc przez zero, zmienia znak z $-$ na $+$.

Punkt D ($\chi=0$) jest punktem influencji elektrostatycznej ładunku K' na kulę K .

W przykładzie przedstawionym po prawej stronie rys. 7 linia dla V i Q jest prostą poziomą, podczas gdy na skutek liniowego zwiększania się parametru κ linia dla V' i q' jest hiperbolą.

W punkcie $\kappa=2,6$ linia H przecina prostą V , a linia Δ — oś odciętych; od tego punktu (ku stronie prawej) ładunki H są nieznacznie większe od ładunków Q i ładunki dodatkowe kuli K mają wartości dodatnie. Wiąże się to ze spadkiem potencjału V' , który powoduje wzrost wartości ładunków dodatnich wewnątrz K . To samo zjawisko (zwiększanie się potencjału V względem potencjału V') wywołuje odwrotne skutki w kuli K' powodując zmniejszanie się ładunków łącznych H' i wzrost bezwzględnych wartości ujemnych ładunków Δ' . Krzywa H' przecina oś odciętych w punkcie G , odpowiadającym wartości $\kappa=g=2,95$. Od punktu G rozpoczyna się nieograniczony obszar anomalii zewnętrznej. Punkt G ($\chi=\infty$) jest punktem influencji elektrostatycznej ładunku kuli K na kulę K' .

5. PRZEBIEGI OGÓLNE — ZAKOŃCZENIE

W rozdz. 2, 3 i 4 rozważaliśmy następujące przebiegi:

- A. przebieg wielkości $H, H', \Delta, \Delta', Q, q', u$ przy stałych i danych potencjałach V i V' oraz przy zmiennym parametrze δ ,
- B. przebieg wielkości $Q, q', V, V', u, \Delta, \Delta'$ przy stałych i danych ładunkach H i H' oraz przy zmiennym parametrze δ ,
- C. przebieg wielkości $Q, q', u, H, H', \Delta, \Delta'$ przy stałym parametrze δ i przy danej zmienności potencjałów V i V' .

Przebiegi powyższe możemy nazwać podstawowymi; jest oczywiste, że stanowią one przypadki szczególne następujących procesów ogólniejszych:

- a. W przypadku A zamiast stałych potencjałów V i V' można przyjąć potencjały zmieniające się w zależności od parametru odległościowego δ

$$V = \varphi_1(\delta), \quad V' = \varphi_2(\delta).$$

W przypadku B zamiast stałych ładunków H, H' można przyjąć ładunki zmieniające się w zależności od δ

$$H = f_1(\delta), \quad H' = f_2(\delta).$$

W przypadku C można przyjąć dowolną zmienność potencjałów V, V' lub ładunków H, H' .

- b. Zamiast rozważać, jak dotychczas, przebiegi lokalne, możemy obliczać również dowolne procesy czasowe wymienionych wyżej wielkości.
- c. Można wreszcie przyjąć narzucone dowolne jednoczesne procesy lokalne lub czasowe dwóch z wymienionych wyżej wielkości.

Jest zupełnie oczywiste, że metody rozwinięte w niniejszej pracy mogą być bez żadnych trudności dostosowane do przypadków ogólnych scharakteryzowanych wyżej w a., b. lub c. W przypadkach wymienionych w a. wielkości zmienne mogą być dane graficznie lub analitycznie; najlepiej jest obliczać szukane wielkości punkt po punkcie. Przy procesach czasowych należy koniecznie uwzględnić uwagę przytoczoną na końcu rozdz. 2. Przy zadanej jednoczesnej zmienności rozmaitych wielkości będziemy musieli czasem uprzednio rozwiązywać proste równania liniowe. Postępowanie we wszystkich wymienionych przypadkach wydaje się tak proste, że przytaczanie przykładów można uważać za zbyteczne.

Znaczenie powyższej pracy jest następujące:

- a. Ujawniono w niej niektóre ważne własności pola elektrostatycznego dwóch kul. Stwierdzono przy tym, że własności te uzależnione są od trzech parametrów podstawowych g, κ i χ ; przedstawiono zależności między tymi parametrami.
- b. W szczególności przedstawiono możliwość istnienia w polu dwóch kul tak zwanej anomalii $+$ —, oraz wykazano, że anomalia ta — w zależności od warunków — może nie występować wcale albo też może obejmować jeden lub nawet dwa zakresy zmienności niektórych parametrów. Wykazano związek punktów krytycznych ładunku i potencjału z anomalią $+$ —, jak również związek z tymi zjawiskami influencji elektrostatycznej, która występuje zawsze na granicy obszaru anomalii.
- c. Podano metodę analizy przebiegu potencjałów i ładunków w ogólnych procesach przy zmienności jednego parametru lub przy jednoczesnej zmienności kilku parametrów. Przedstawiono metodę obliczania przebiegów podstawowych i zilustrowano ją kilkoma przykładami.
- d. Metoda powyższa, która jest ścisła dla pola dwóch kul, może być uważana za metodę przybliżoną w zastosowaniu do dwóch ciał o ogólniejszych kształtach. Uogólnienie takie zmienia wprowadzie rodzaj zależności między występującymi zjawiskami, nie zmienia jednak ich elementów.

Katedra Podstaw Elektrotechniki
Politechniki Łódzkiej

Б. КОНОРСКИ

ТРИ ПАРАМЕТРА В ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОМ ПОЛЕ ДВУХ ОДИНАКОВЫХ ШАРОВ

Резюме

В настоящем труде автор доказывает, что в электростатическом поле двух одинаковых шаров решающее влияние имеют три величины: g, χ и κ , которые названы основными параметрами. Параметр g зависит от расстояния между центрами шаров и от их радиуса; для значений $\delta = \frac{D}{r} > 5$ можно прибли-

зительно принять $\delta \approx g$; значения g при $\delta < 5$ мы находим в таблице 1 и по рис. 1.

Параметр χ равен отношению зарядов, а параметр κ отношению потенциалов обоих шаров; δ может иметь значения от $\delta > 2$ до $\delta \rightarrow \infty$; параметры χ и κ могут изменяться от $-\infty$ до $+\infty$. Между этими параметрами существует простая зависимость (17), позволяющая рассчитывать соответствующие друг другу значения g , χ и κ (таблицы 2, 3 и 4), а также представлять их графически при помощи семейств кривых (рис. 2а, б 3 и 4).

Пользуясь этими зависимостями, мы в состоянии провести точный анализ переменных процессов, состоящих в том, что принимается один из трёх вышеупомянутых параметров как величину постоянную (напр. потенциалы обоих шаров, их заряды, или расстояние между ними) и затем производится исследование влияния второго параметра на третий параметр. Простейшие из этих процессов представлены на рис. 5а, 5б, 6а, 6б и 7; соответственные расчёты поданы в таблицах 5, 6 и 7. Из этих рисунков и таблиц видно, что существуют состояния, в которых выступает так наз. а н о м а л и я + —, состоящая в том, что потенциал одного из шаров имеет знак противоположный ей заряду.

Отрезки, на которых происходит вышеупомянутая аномалия, заштрихованы на рис. 5б, 6б и 7. Как это следует из последнего рисунка, представляющего процесс при соблюдении постоянного расстояния между шарами, возможны здесь даже два аномальные состояния: одно на ограниченном отрезке OCD представляет т. наз. внутреннюю аномалию; второе на (неограниченной) прямой GIK соответствует т. наз. внешней аномалии.

В случаях, когда заряды H и H' переменны, одной из предельных точек области аномалии является точка (пункт G на рис. 6б, пункты O и G на рис. 7), соответствующая состоянию электростатической инфлюенции влияния заряда одного шара на другой.

Представленный здесь метод можно тоже применить и к более общим процессам, а также и к временным процессам.

B. KONORSKI

DREI GRUNDPARAMETER IM ELEKTROSTATISCHEN FELDE ZWEIER GLEICHER KUGELN

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wird dargelegt, dass im elektrostatischen Feld zweier gleicher Kugeln drei Grössen g , χ und κ von ausschlaggebender Bedeutung sind. Diese Grössen werden Grundparameter genannt; Parameter g hängt von der Entfernung D der Kugelmittelpunkte und von deren Radius r ab. Für die Werte $\delta = \frac{D}{r} > 5$ kann man angenähert $\delta \approx g$ annehmen, für $\delta < 5$ können die entsprechenden Werte von g aus der Tafel 1 und aus Bild 1 entnommen werden. Parameter χ ist das Verhältnis der Ladungen beider Kugeln, Parameter κ ist das Verhältnis der beiden Potentiale. Parameter δ kann Werte annehmen, die grösser als 2 sind und bis ins Unendliche reichen, beide Parameter χ und κ können sich ändern von $-\infty$ bis $+\infty$.

Zwischen den drei Parametern besteht die einfache Beziehung (17), welche die Berechnung der einander entsprechenden Werte von g , χ , κ (Tafeln 2, 3, 4), wie auch die Darstellung mittels Kurvenscharen (Bild 2а, 2б, 3, 4) ermöglicht.

Mit Hilfe dieser Beziehungen kann man eine genaue Analyse der Vorgänge durchführen, die sich ergeben, wenn man einen von den genannten drei Parametern als konstant ansieht (z. B. die Entfernung der Kugeln, ihre Ladungen oder ihre Potentiale) und den Einfluss der Aenderung des zweiten Parameters auf den Wert des letzten Parameters untersucht. Einfachste Vorgänge dieser Art werden in Bild 5a, 5b, 6a, 6b und 7 dargestellt; die entsprechenden Berechnungen enthalten die Tafeln 5, 6 und 7. Aus diesen Zusammenstellungen erhellt, dass es Zustände gibt, in welchen eine sogenannte Anomalie $+$ - auftritt, die darauf beruht, dass das Potential einer der Kugeln das entgegengesetzte Vorzeichen wie deren Ladung hat. Die Strecken, auf welchen diese Anomalie stattfindet, sind im Bild 5b, 6b und 7 gestrichelt angedeutet. Wie aus dem letzten Bild ersichtlich ist, das sich auf den Vorgang bei gleichbleibender Entfernung der Kugeln bezieht, sind hier sogar zwei anomale Zustände möglich; der eine (auf der beschränkten Strecke OCD) stellt die sogenannte innere Anomalie dar; der zweite (auf dem Strahl GJK...) entspricht der äusseren Anomalie.

In Vorgängen mit veränderlichen Ladungen H , H' entspricht einer der Grenzpunkte des Anomaliegebietes (Punkt G im Bild 6b, Punkte O und G im Bild 7) der elektrostatischen Influenz der Ladung der einen Kugel auf die andere Kugel.

Die hier entwickelte Methode lässt sich auch auf allgemeinere Vorgänge sowie auf Zeitvorgänge anwenden.

621.216 933.937

S. SZPOR

Rola indukcyjności szeregowych w układach ochrony odgromowej stacyjnej — Zasady układów z dławkami

Manuskrypt dostarczono 22. 10. 1955

Omaśnia się potrzebę dodatkowych środków w ochronie odgromowej stacyjnej obok odgromników zaworowych. Środkami tymi mogą być podejścia odmontowane lub dławki szeregowy. Rozpatruje się pożyteczne działanie indukcyjności szeregowy na wejściu linii oraz szkodliwe działanie indukcyjności występujących wewnątrz stacji.

Najpierw rozpatruje się prąd wyładowczy w odgromniku stacyjnym przy oddzielnych i przy połączonych uziemieniach po dwóch stronach indukcyjności wejściowej. Połączenie uziemień, możliwe przy zastosowaniu dławników daje lepsze widoki łagodzenia prądu wyładowczego. Dalej bada się grę indukcyjności wejściowej i pojemności stacyjnej przy oddzielnych i przy połączonych uziemieniach.

Następnie omaśnia się ogólnie szkodliwe spadki napięciowe na indukcyjnościach wewnętrznych, przed i za odgromnikami. Przy trochę sztucznych założeniach wytłumacza się możliwości korzystnej lub szkodliwej interferencji oscylacji; jednakże dyskusja prawdopodobnych warunków rzeczywistych wskazuje na raczej niewielkie znaczenie interferencji. Spadki za odgromnikami wydmuchowymi lub iskiernikami okazują się mniej groźne niż za odgromnikami zaworowymi.

Wreszcie wyprowadza się dogodniejsze do obliczeń sformułowania dla szkodliwych spadków indukcyjnych już tylko w układach z dławkami i z połączonymi uziemieniami. Bada się liczne warianty różniące się rozmieszczeniem pojemności stacyjnych w stosunku do odgromników zaworowych, ustawieniem tych odgromników w stosunku do izolacji chronionej, warunkami w gałęzi odgromnika wydmuchowego na wejściu linii. Wyciąga się wnioski o skuteczności dławników wraz z zaleceniami, ażeby ograniczać długość gałęzi odgromnika wydmuchowego i skupiać jak największe pojemności w pobliżu odgromników zaworowych.

1. WSTĘP

Do ochrony odgromowej urządzeń stacyjnych wysokiego napięcia stosuje się przeważnie odgromniki zaworowe. Same jednak odgromniki — bez dodatkowych środków ochronnych — nie zapewniają całkowitego bezpieczeństwa w ostrzejszych zakłóceniach przepięciowych. Istnieją mianowicie trzy rodzaje okoliczności niweczających lub ograniczających skuteczność ochrony odgromnikami.

1. Zbyt wielki i zbyt stromo rosnący *prąd wyładowczy* (udarowy) w odgromniku zaworowym sprawia, że *napięcie obniżone* wypada zbyt wysokie. Rola stromości wzrostu prądu jest związana z pętlą napięciowo-prądową. Zbyt ostre warunki prądowe grożą szczególnie przy bezpośrednim bliskim uderzeniu pioruna w przewód roboczy. Oprócz zbyt wysokiego przepięcia obniżonego wchodzi wtedy w rachubę niebezpieczeństwo *uszkodzenia i wybuchu odgromnika*.

2. Do napięcia obniżonego przez odgromnik zaworowy dodają się spadki napięciowe, tak że przepięcie wypadkowe na izolacji chronionej wypada wyższe. Spadek napięciowy na oporności uziemienia odpada na ogół z tej gry, jeżeli uziemienia stacyjne (odgromnikowe i osłonowe¹) są połączone. Pozostają natomiast zawsze *spadki indukcyjne* w przewodach wysokonapięciowych, w gałęziach odgromnikowych, w przewodach uziemających, a niekiedy również w uzwojeniach szeregowych (transformatorów prądowych lub wyzwalaczy pierwotnych). Spadki te są zależne od *stromości wzrostu prądów* wyładowczych w odgromnikach lub innych prądów udarowych. Niekiedy decyduje *stromość wzrostu przepięcia* w urządzeniu. Szczególnie groźnie przedstawia się przypadek bezpośredniego bliskiego uderzenia pioruna.

3. Obok wartości szczytowej przepięcia również jego *stromość czoła* może przedstawiać niebezpieczeństwo dla niektórych części urządzenia. Najbardziej wrażliwe na stromość przepięcia są *maszyny wirujące*; często przyjmuje się zasadę, że urządzenia z maszynami wirującymi wymagają — obok bardzo starannego obniżania przepięć odgromnikami zaworowymi — również łagodzenia czoła. W stosunku do transformatorów energetycznych przyjmuje się przeważnie, że samo obniżanie przepięcia jest dostateczne, ponieważ przepisowe próby udarowe zapewniają odporność na bardzo strome czoła; jednakże dla starych transformatorów, nie odpowiadających nowoczesnym wymaganiom udarowym, łagodzenie czoła może być pożądane. Podobnie przedstawia się zagadnienie transformatorów mierniczych. Łagodzenie stromości czoła — dla maszyn wirujących — może być potrzebne nie tylko przy bezpośrednich bliskich uderzeniach piorunów, lecz nawet przy przepięciach przychodzących z większych odległości.

¹ W rozważaniach nad ochroną odgromową należy rozróżniać liczne rodzaje uziemień — w związku z różnymi zadaniami ochronnymi. Autor stosuje dla uziemień określenia zależne od dołączanych przedmiotów lub miejsc urządzeń:

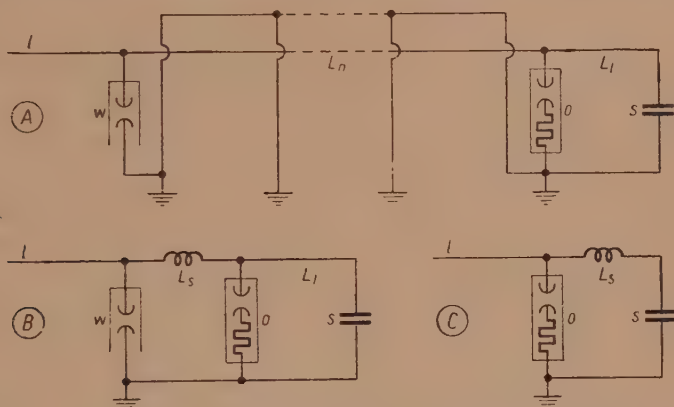
osłonowe	— dla osłon metalowych i konstrukcyj wsporczych,
odgromnikowe	— dla odgromników, niekiedy również dla kondensatorów należących do ochrony odgromowej,
piorunochronowe	— dla piorunochronów,
zerowe	— dla punktu zerowego w układzie energetycznym (a nie w obwodach pomiarowych i przekaźnikowych).

Ażeby poprawić skuteczność ochrony stacyjnej, stosuje się oprócz odgromników zaworowych *środki ochronne dodatkowe*. Można dla nich wskazać trzy zadania:

- zmniejszanie wartości szczytowej prądu wyładowczego (niebezpieczeństwo 1),
- łagodzenie stromości czoła prądu wyładowczego lub innego prądu udarowego (niebezpieczeństwa 1 i 2),
- łagodzenie stromości czoła przebiegu (niebezpieczeństwa 2 i 3).

Te trzy rodzaje działania nie są na ogół niezależne od siebie.

Najbardziej rozpowszechnionym środkiem dodatkowym jest *osłona podejścia*, tj. odcinka linii napowietrznej przed stacją, przewodem odgromowym. Rys. 1 przedstawia w części (A) taki układ; istotnym uzupeł-



Rys. 1. Układy ochrony stacyjnej z odgromnikami zaworowymi *o* i ze środkami dodatkowymi; (A) — układ z podejściem napowietrznym osłoniętym L_n ; (B) — układ prawidłowy z dławikiem L_s ; (C) — układ nieprawidłowy z dławikiem L_s ; *s* — izolacja stacyjna; *w* — odgromnik wydmuchowy (lub iskiernik).

nieniem przewodu odgromowego jest odgromnik wydmuchowy *w* na końcu liniowym podejścia. Długość przewodu odgromowego wynosi zwykle od kilkuset do kilku tysięcy metrów. Koszty dodatkowego podejścia wypadają stosunkowo wielkie, szczególnie przy niższych napięciach znamionowych; ograniczenia ekonomiczne skłaniają, ażeby przy niższych napięciach znamionowych zadowalać się nieco mniej bezpiecznymi rozwiązaniami niż przy najwyższych napięciach (warunki osłonowe, a zwłaszcza warunki uniknięcia przeskoków odwrotnych). Trudności i koszty są szczególnie dotkliwe, gdy uzupełnia się ochronę w istniejących urządzeniach.

W stacjach z maszynami wirującymi często stosuje się ponadto kon-

densatory — jako środek dodatkowy usuwający wspólnie z podejściem osłoniętym niebezpieczeństwo 3. Kondensatory zastępuje się niekiedy odcinkami kablowymi, jeżeli odcinki te są potrzebne z innych względów.

Trudności i wielkie koszty związane z osłoniętymi podejściami składają do prac nad innymi środkami dodatkowymi o podobnej skuteczności. Mogą to być *dławiki szeregowy* na wejściu linii napowietrznej do stacji. Rys. 1 przedstawia w części (B) *prawidłowy układ* ochronny z dławikami. W porównaniu z układem (A) dławik jest jak gdyby skupionym podejściem; indukcyjność L_s dławika odpowiada indukcyjności L_n podejścia osłoniętego. Odgromnik zaworowy o i odgromnik wydmuchowy w (lub iskiernik) są rozmieszczone w obu układach podobnie. Połączenie uziemień odgromników o , w w układzie (B) jest poważną zaletą w porównaniu z układem (A).

Zła ocena przydatności dławików szeregowych do ochrony odgromowej, rozpowszechniona od lat trzydziestych obecnego stulecia, jest związane z *nieprawidłowymi układami*. Nieprawidłowe jest zwłaszcza włączanie dławika między odgromnikiem o a izolacją chronioną s , przedstawione w części (C) rys. 1; w takim układzie dławik ogromnie zwiększa niebezpieczeństwo 2 spadku indukcyjnego. Również konstrukcje dawniejszych dławików nie odpowiadają nowoczesnym wymaganiom w sprawie wytrzymałości elektrycznej i wytrzymałości zwarciorowej.

W nowszej literaturze znajduje się tylko nieliczne i pobieżne wzmianki o możliwościach stosowania dławików jako środków dodatkowych w ochronie odgromowej (na przykład [6]). Wysunięcie więc dławika zamiast podejścia osłoniętego wymaga jeszcze uzasadnień teoretycznych, prób laboratoryjnych i potwierdzeń eksploatacyjnych. Artykuł niniejszy obejmuje podstawowe *rozważania teoretyczne* nad różnymi stronami działania ochronnego dławików, nad szkodliwymi spadkami indukcyjnymi w różnych wariantach oraz nad widokami współpracy dławików z kondensatorami lub z innymi częściami urządzeń przedstawiającymi znaczne pojemności. Niektóre wyniki tych rozważań można wyzyskiwać również dla układów bez dławików szeregowych.

Laboratoryjne *badania modelowe* układów ochrony stacyjnej — ostatnio dość rozpowszechnione — są obecnie w toku również w Zakładzie Wysokich Napięć Politechniki Gdańskiej. Prace te powinny doprowadzić do pewniejszej oceny układów z dławikami i do dokładniejszych podstaw projektowania, ale nie mogą przekreślić dużego znaczenia studiów teoretycznych bardzo pomocnych w poszukiwaniu nowych rozwiązań i udoskonalień. W wymienionym zakładzie opracowuje się też *nowe konstrukcje dławików*, poddaje się je próbom laboratoryjnym i wykonuje małe serie dławików do badań eksploatacyjnych. Pierwsze urządzenie z nowymi dławikami jest już czynne w roku 1955.

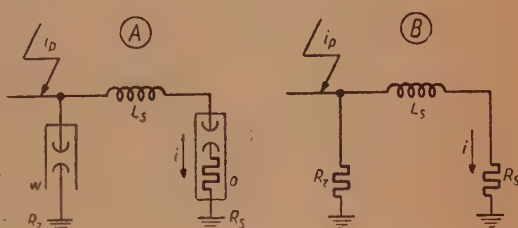
2. ŁAGODZENIE PRĄDU WYŁADOWCZEGO W ODGROMNIKACH STACYJNYCH PRZY ODDZIELNYCH UZIEMIENIACH PO DWÓCH STRONACH INDUKCYJNOŚCI

Badamy przypadek przedstawiony na rys. 2 w części (A). Indukcyjność L_s odgradza odgromnik stacyjny o od miejsca uderzenia pioruna o prądzie i_p . Ma ona jako zadanie łagodzić prąd wyładowczy i w odgromniku o. Wielką rolę odgrywa w tym również odgromnik wydmuchowy w (lub iskiernik) po stronie liniowej indukcyjności L_s dając drogę dla znacznej części prądu piorunowego do uziemienia R_z . Uziemienia R_z , R_s po dwóch stronach indukcyjności nie są połączone, co odpowiada przypadkowi podejścia osłoniętego. Dyskusje tego rodzaju są znane od około 20 lat (na przykład [1]). Ponowne rozpatrzenie jest tutaj konieczne w celu wszechstronnego porównania różnych układów i przypadków.

Układ (A) na rys. 2 odpowiada stacji umieszczonej na końcu linii napowietrznej, bez dodatkowych linii, które łagodziłyby trochę obciążenie udarowe odgromnika stacyjnego biorąc część prądu piorunowego. Ostre założenie pojedynczej linii napowietrznej ma w niektórych rozważaniach w dalszych rozdziałach jeszcze większy wpływ na wyniki.

Przechodzimy do układu zastępczego w części (B) rys. 2 — przyjmując, że iskierniki odgromników w , o przedstawiają po bardzo wczesnych zapłonach pomijalnie małe oporności i włączając oporność zmienną odgromnika o do R_s . Pominięcie zjawisk rozgrywających się przez krótki czas przed zapłonami odgromników nie powoduje wielkich błędów w obliczeniach rozptyłu prądów. Przyjmujemy tytułem uproszczenia stałą oporność R_s . Jeżeli przeskoki odwrotne w różnych fazach w pobliżu miejsca uderzenia zwierają 3 przewody robocze, co zdarza się często, to w układzie zastępczym (B) można uważać indukcyjność L_s za wypadkową z równoległej współpracy 3 faz, a prąd i za sumę prądów wyładowczych w odgromnikach stacyjnych należących do 3 faz.

Działanie hamujące indukcyjności L_s na wzrost prądu i jest oczywiste. Ograniczenie zaś szybkości wzrostu prądu i pozwala uzyskać mniejszą wartość szczytową i_{\max} , niż wynikałoby ze stosunku oporności R_z , R_s . Zależy to w znacznej mierze od czasu trwania udaru piorunowego i_p ;



Rys. 2. Układ z indukcyjnością L_s odgradzającą odgromnik zaworowy o od miejsca uderzenia pioruna i z oddzielnymi uziemieniami R_z , R_s ; (A) — układ pierwotny; (B) — układ zastępczy; w — odgromnik wydmuchowy.

natomiast stromość czoła i_p ma stosunkowo niewielkie znaczenie. Dlatego zakładamy do rozważań matematycznych w najprostszy sposób uder i_p o czoło pionowym i o grzbiecie wykładowniczym:

$$\left. \begin{aligned} i_p &= i_{p \max} \exp\left(-\frac{t}{T_w}\right) \quad \text{dla } t > 0, \\ \text{lub w postaci operatorowej} \\ i_p &= i_{p \max} \frac{p}{p + \frac{1}{T_w}} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Dla układu (B) na rys. 2 można wyprowadzić równanie różniczkowe prądu wyładowczego i

$$\left. \begin{aligned} i + \frac{1}{R_z} \left(R_s i + L_s \frac{di}{dt} \right) &= i_p, \\ \text{albo w postaci operatorowej} \\ i \left(1 + \left(\frac{R_s}{R_z} + \frac{L_s}{R_z} p \right) \right) &= i_p. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Podstawiając wyrażenie (1) otrzymuje się

$$i = i_{p \max} \frac{R_z}{L_s} \frac{p}{\left(p + \frac{1}{T_w} \right) \left(p + \frac{1}{T} \right)}, \quad (3)$$

gdzie stała czasowa

$$T = \frac{L_s}{R_z + R_s}. \quad (4)$$

Posługując się wzorami rachunku operatorowego wyprowadza się ostatecznie rozwiązanie w postaci

$$i = i_{p \max} \frac{R_z}{R_z + R_s} \frac{1}{\frac{T}{T_w} - 1} \left\{ \exp\left(-\frac{t}{T}\right) - \exp\left(-\frac{t}{T_w}\right) \right\}. \quad (5)$$

Największa stromość czoła prądu i występuje według tego sformułowania w chwili początkowej i odpowiada wzorowi

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{\max} = \frac{i_{p \max}}{T} \frac{R_z}{R_z + R_s} = \frac{i_{p \max} R_z}{R_s}, \quad (6)$$

Prąd i rośnie następnie do wartości maksymalnej i_{\max} , która występuje w chwili

gdzie

$$\left. \begin{aligned} t &= T_w \Psi, \\ \Psi &= \frac{\frac{T}{T_w}}{\frac{T}{T_w} - 1} \ln \frac{T}{T_w}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Maximum prądu

gdzie

$$\left. \begin{aligned} i_{\max} &= i_{p \max} \frac{R_z}{R_z + R_s} \varphi, \\ \varphi &= \frac{1}{\frac{T}{T_w} - 1} \left[\left(\frac{T}{T_w} \right)^{\frac{1}{\frac{T}{T_w} - 1}} - \left(\frac{T}{T_w} \right)^{-\frac{\frac{T}{T_w}}{\frac{T}{T_w} - 1}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Jeżeli $T \gg T_w$, to w przybliżeniu

$$\psi \approx \ln \frac{T}{T_w}, \quad \varphi \approx \frac{T_w}{T}. \quad (9)$$

W szczególnym przypadku $T = T_w$ wypada przejść do rozwiązania

$$\left. \begin{aligned} i &= i_{\max} \frac{R_z}{L_s} \frac{p}{\left(p + \frac{1}{T_w} \right)^2}, \\ i &= i_{p \max} \frac{R_z}{R_z + R_s} \frac{t}{T_w} \exp \left(-\frac{t}{T_w} \right), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

skąd wynikają wartości określające maximum prądu i

$$\psi = 1, \quad \varphi = \frac{1}{e} \quad (11)$$

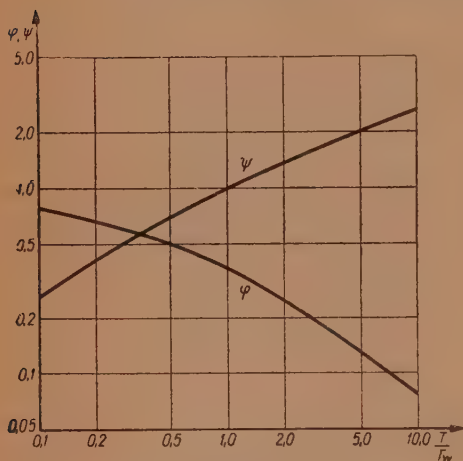
Największa stromość wzrostu prądu odpowiada również w tym przypadku wzorowi (6).

Rys. 3 przedstawia zmiany współczynników φ , ψ w funkcji $\frac{T}{T_w}$. Stosunkowo wielka stała czasowa T zapewnia małą wartość φ , daje więc skuteczne ograniczenie prądu wyładowczego. Już przy $T = T_w$ współczynnik $\varphi = \frac{1}{e}$ zapewnia ograniczenie i_{\max} do około 30% $i_{p \max}$, co przy równomiernym podziale między 3 fazy daje w pojedynczej fazie około 10%

$i_p \max$; jest to poziom raczej umiarkowany w porównaniu z wartościami obciążalności udarowej nowoczesnych odgromników zaworowych.

Ażeby uzyskać na przykład $T=50 \mu s$, należy zastosować:

przy sumie $R_z + R_s \approx$	5	10	20	50	Ω
indukcyjność $L_s \approx$	250	500	1000	2500	μH



Rys. 3. Wykres współczynników φ , ψ występujących we wzorach (7), (8) — w funkcji stosunku stałej czasowej układu T do stałej czasowej udaru piorunowego T_w .

Wymagana indukcyjność jest tym większa, im większej stałej czasowej T żąda się oraz im większa jest suma oporności $R_z + R_s$. W sumie tej wielką rolę może odgrywać oporność R_z . Można wtedy zapewnić dobrą skuteczność mniejszej indukcyjności L_s zmniejszając oporność uziemienia odgromnika wydmuchowego (lub iskiernika) po stronie liniowej.

Oddzielne uziemienia R_z , R_s są niekorzystne w ochronie stacyjnej. Stosunkowo wielka oporność R_z pociąga bowiem za sobą trzy niepożądane okoliczności:

1. niezbyt mały stosunek $\frac{R_z}{R_z + R_s}$ we wzorze (8) na i_{\max} ,
2. małą stałą czasową T według wzoru (4) i wskutek tego wielką wartość współczynnika φ , który wchodzi do wzoru (8) na i_{\max} ,
3. małą stałą czasową $\frac{L_s}{R_z}$, która występuje we wzorze (6) na $\left(\frac{di}{dt}\right)_{\max}$.

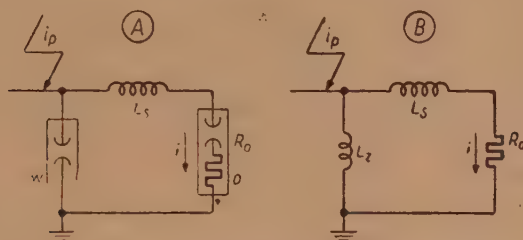
3. ŁAGODZENIE PRĄDU WYŁADOWCZEGO W ODGROMNIKACH STACYJNYCH PRZY WSPÓLNYM UZIEMIENIU PO DWÓCH STRONACH INDUKCYJNOŚCI

Połączenie uziemień po obu stronach indukcyjności szeregowej L_s — w urządzeniu z dławikami ochronnymi — pozwala uzyskać korzystniejszy rozpyływ prądów. Na rys. 4 przedstawiono w części (A) taki układ. Oporność wspólnego uziemienia nie ma tutaj wpływu na podział prądu piorunowego i_p między odgromniki w , o . Poważną rolę odgrywa natomiast indukcyjność L_z gałęzi odgromnika wydmuchowego w . Mała wartość L_z w porównaniu z indukcyjnością szeregową L_s pozwala ograniczyć skutecznie prąd wyładowczy i w odgromniku stacyjnym o . Oporność R_o tego odgromnika ma raczej tylko drugorzędne znaczenie; traktujemy ją w dalszych rozważaniach jako stałą — tytułem uproszczenia dalekiego od

ściśłości. W części (B) rys. 4 przedstawiono układ zastępczy, który wchodzi w rachubę po zapłonie odgromników z obu stron indukcyjności L_s .

Dla układu tego wyprowadza się równanie różniczkowe

$$\left. \begin{aligned} R_o i + (L_s + L_z) \frac{di}{dt} &= L_z \frac{di_p}{dt}, \\ \text{lub w postaci operatorowej} \quad i \left(1 + \frac{L_s + L_z}{R_o} p \right) &= i_p \frac{L_z}{R_o} p. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$



Rys. 4. Układ z indukcyjnością L_s odgradzającą odgromnik zaworowy o od miejsca uderzenia pioruna i ze wspólnym uziemieniem; (A) — układ pierwotny; (B) — układ zastępczy; w — odgromnik wydmuchowy.

Przyjmując kształt wykładniczy udaru i_p według wzoru (1) otrzymuje się rozwiązanie w postaci operatorowej

$$i = i_{p\max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{p^2}{\left(p + \frac{1}{T_w}\right) \left(p + \frac{1}{T}\right)}, \quad (13)$$

ze stałą czasową

$$T = \frac{L_s + L_z}{R_o}. \quad (14)$$

Wzory rachunku operatorowego dają ostatecznie rozwiązanie

$$i = i_{p\max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{1}{\frac{T}{T_w} - 1} \left\{ \frac{T}{T_w} \exp\left(-\frac{t}{T_w}\right) - \exp\left(-\frac{t}{T}\right) \right\}. \quad (15)$$

W chwili początkowej $t=0$ wzór ten daje wartość szczytową

$$i_{\max} = i_{p\max} \frac{L_z}{L_s + L_z}. \quad (16)$$

Jest to wynik gry samych tylko indukcyjności L_s , L_z , bez wpływu oporności R_o . Rola tej oporności zaznacza się dopiero później; mianowicie prąd maleje szybciej niż według krzywej wykładniczej o stałej czasowej T_w i przechodzi przez zero w chwili

$$t_0 = T_w \frac{1}{\frac{T_w}{T} - 1} \ln \frac{T_w}{T}. \quad (17)$$

Obok skutecznego ograniczenia wartości szczytowej i_{\max} występuje więc skrócenie czasu trwania wielkich wartości prądowych i jako dodatkowa okoliczność pomyślna. Większego wpływu znacznej oporności R_o można spodziewać się przy wyższych napięciach znamionowych (przy wyższych słupach zmiennooporowych w odgromnikach zaworowych). Okolicznością obostrzającą natomiast może być znaczne napięcie zapłonowe odgromnika wydmuchowego w (lub iskiernika); działa ono w kierunku zwiększenia wartości i_{\max} .

Podobnie do wzoru (16) można napisać biorąc w rachubę bardzo wielką stromość wzrostu prądu piorunowego $\left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max}$ w okresie początkowym

$$\left(\frac{di}{dt}\right)_{\max} = \left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max} \frac{L_z}{L_s + L_z}. \quad (18)$$

W szczególnym przypadku $T = T_w$ przechodzi się do rozwiązania

$$\left. \begin{aligned} i &= i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{p^2}{\left(p + \frac{1}{T_w}\right)^2}, \\ i &= i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \left(1 - \frac{t}{T_w}\right) \exp\left(-\frac{t}{T_w}\right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Prąd i zmniejsza się do zera w chwili

$$t_0 = T_w.$$

Jeżeli na przykład $L_s \approx 500 \mu\text{H}$,

$$L_z \approx 5 \quad 10 \quad 20 \quad 50 \mu\text{H},$$

to według wzoru (16) otrzymuje się

$$i_{\max} \approx 0,01 \quad 0,02 \quad 0,04 \quad 0,1 i_{p \max}.$$

Skuteczne ograniczenie wartości i_{\max} wymaga małej indukcyjności L_z . Zejście do $i_{\max} \approx (0,01 \dots 0,04) i_{p \max}$ wydaje się możliwe. Zapewnia się w ten sposób warunki pracy odgromników stacyjnych daleko lepsze niż przy oddzielnych uziemieniach i przy podobnej indukcyjności L_s (rozdział 2).

Przyjmując dalej $L_s + L_z \approx 500 \mu\text{H}$, $T_w \approx 50 \mu\text{s}$,

$$R_o \approx \begin{matrix} 1 & 2 & 5 & 10 & 20 & 50 & 100 \end{matrix} \Omega,$$

oblicza się stałą czasową

$$T \approx \begin{matrix} 500 & 250 & 100 & 50 & 25 & 10 & 5 \end{matrix} \mu\text{s}$$

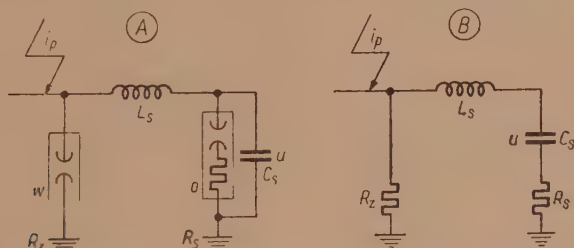
oraz określa się chwilę przejścia prądu i przez zero

$$t_0 \approx \begin{matrix} 130 & 100 & 70 & 50 & 35 & 20 & 13 \end{matrix} \mu\text{s}.$$

Wzrost oporności R_o w stosunku 100 powoduje więc zmniejszenie czasu t_0 tylko w stosunku 10.

4. POŻYTECZNA WSPÓŁPRACA Z POJEMNOŚCIĄ STACYJNĄ PRZY ODDZIELNYCH UZIEMIENIACH PO DWÓCH STRONACH INDUKCYJNOŚCI

Rozpatrujemy współpracę indukcyjności szeregowej L_s z pojemnością stacyjną C_s w przypadku przedstawionym na rys. 5 w części (A). Przyjmując tutaj oddzielnie uziemienia R_z , R_s mamy na myśli głównie urządzenia z podejściem osłoniętym. Wchodzące w rachubę pojemności C_s wahają się w bardzo szerokim obszarze wartości; większe pojemności, na przykład około $0,1 \dots 1 \mu\text{F}$, występują w urządzeniach z kondensatorami, mniejsze, rzędu $10^{-4} \dots 10^{-2} \mu\text{F}$, bez kondensatorów.



Rys. 5. Układ z indukcyjnością L_s odgradzającą pojemność stacyjną C_s oraz odgromnik zaworowy o od miejsca uderzenia pioruna i z oddzielnymi uziemieniami R_z , R_s ; (A) — układ pierwotny; (B) — układ zastępczy; w — odgromnik wydmuchowy.

Piorun o prądzie udarowym i_p uderza w przewód roboczy w niewielkiej odległości od urządzenia rozdzielczego. Znaczna część prądu piorunowego odgałęzia się poprzez odgromnik wydmuchowy w (lub poprzez iskrę na izolatorze liniowym), drogą o oporności uziemieniowej R_z . Indukcyjność szeregowa L_s hamuje przepływ prądu częściowego przez pojemność C_s biorąc w ten sposób udział w łagodzeniu stromości wzrostu napięcia u w urządzeniu. Obniżenie wartości szczytowej u_{\max} przez grę L_s , C_s

jest trudniejsze i wątpliwe; dlatego stosuje się do tego celu przeważnie odgromniki zaworowe o.

Współpraca indukcyjności L_s oraz pojemności C_s interesuje nas głównie w okresie poprzedzającym zapłon odgromnika zaworowego o. Pomijamy więc w najbliższych rozważaniach wpływ tego przyrządu przyjmując układ zastępczy przedstawiony w części (B) rys. 5. Współdziałanie indukcyjności L_s oraz odgromnika zaworowego po jego zapłonie odbywa się mniej więcej według rozważań w rozdziale 2.

Układamy równanie różniczkowe dla napięcia u

$$u + (R_z + R_s) C_s \frac{du}{dt} + L_s C_s \frac{d^2 u}{dt^2} = R_z i_p,$$

albo w postaci operatorowej

$$u [1 + (R_z + R_s) C_s p + L_s C_s p^2] = R_z i_p. \quad (20)$$

Przyjmując ponownie sformułowanie wykładnicze (1) dla prądu i_p wyprowadza się

$$u = \frac{R_z i_{p \max}}{L_s C_s} \frac{1}{\left(p + \frac{1}{T_w}\right) \left(p^2 + \frac{R_z + R_s}{L_s} p + \frac{1}{L_s C_s}\right)}. \quad (21)$$

Często zdarza się przypadek oscylacyjny, mianowicie jeżeli

$$R_z + R_s < 2 \sqrt{\frac{L_s}{C_s}}.$$

Na przykład przy $L_s \approx 1000 \mu\text{H}$,

przy	$C_s \approx$	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	$1 \mu\text{F}$
wypada	$2 \sqrt{\frac{L_s}{C_s}} \approx$	6300	2000	630	200	63 Ω

Stosunkowo niewielkie oporności R_z , R_s decydują zwykle o charakterze oscylacyjnym zjawisk — nawet przy znacznych pojemnościach C_s , na przykład $1 \mu\text{F}$. Wzory rachunku operatorowego dają w tym przypadku rozwiązanie

$$u = \frac{R_z i_{p \max}}{L_s C_s} \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_w}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T_{\sim}}\right)^2} \exp\left(-\frac{t}{T_w}\right) + \frac{1}{\frac{2\pi}{T_{\sim}} \sqrt{\left(\frac{1}{T_-} - \frac{1}{T_w}\right)^2 + \left(\frac{2\pi}{T_{\sim}}\right)^2}} \exp\left(-\frac{t}{T_-}\right) \sin\left(2\pi \frac{t}{T_{\sim}} - \lambda\right) \right], \quad (22)$$

gdzie

$$T_- = \frac{2L_s}{R_z + R_s},$$

$$\frac{T_{\sim}}{2\pi} = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{L_s C_s} - \frac{(R_z + R_s)^2}{4L_s^2}}}, \quad (23)$$

$$\lambda = \arctg \frac{2\pi T_w T_-}{T_{\sim} (T_- - T_w)}.$$

Ze wzorów tych wynikają możliwości ograniczenia wartości szczytowej u_{\max} przez kondensatory tylko o większej pojemności C_s (na przykład $10 \mu\text{F}$), przy bardzo dużej stałej

czasowej $\frac{T_{\sim}}{2\pi}$ w porównaniu

z wartością T_w . Jednakże tak wielkie kondensatory byłyby bardzo kosztowne i dlatego obniżanie wartości szczytowej przepięcia pozostawia się zwykle odgromnikom zaworowym.

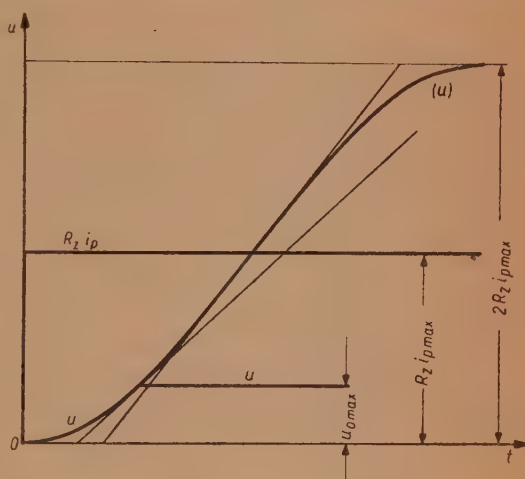
Przy umiarkowanej pojemności C_s można uzyskiwać już tylko łagodzenie stromości wzrostu przepięcia u . Jeżeli stała czasowa $\sqrt{L_s C_s}$ jest mała w porównaniu z wartościami T_w oraz T_- , to można napisać

$$\frac{T_{\sim}}{2\pi} \approx \sqrt{L_s C_s}$$

oraz dla początkowej, najważniejszej części oscylacji przyjąć wzór przybliżony

$$u \approx R_z i_{p \max} \left[1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{T_{\sim}} \right) \right]. \quad (24)$$

Na rys. 6 przedstawiono taki przebieg napięcia u aż do chwili zapłonu odgromnika zaworowego, od której napięcie ustala się na poziomie $u_{o \max}$ — przy idealnej charakterystyce zaworowej. Dalszy ciąg przebiegu u według zależności (24), bez wpływu odgromnika zaworowego, ma na rys. 6 znak (u) .



Rys. 6. Przebieg przepięcia u na pojemności stacyjnej C_s odgradzonej od miejsca uderzenia pioruna indukcyjnością L_s i chronionej odgromnikiem zaworowym przy oddzielnych uziemieniach, przy prostokątnym przebiegu prądu piorunowego i_p oraz przy słabym tłumieniu oscylacji; $u_{o \max}$ — poziom ograniczony przez odgromnik zaworowy o idealnej charakterystyce; (u) — przebieg przepięcia u bez interwencji odgromnika zaworowego.

Jeżeli $u_{o \max} < R_z i_{p \max}$, to największa stromość wzrostu u występuje według zależności (24) w chwili zapłonu odgromnika i odpowiada wzorowi

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx \frac{\sqrt{2R_z i_{p \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (25)$$

Przy $u_{o \max} > R_z i_{p \max}$ natomiast największa stromość występowałaby przed zapłonem odgromnika zaworowego i byłaby równa maksymalnej stromości kosinusoidy określonej według wzoru (24)

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx \frac{R_z i_{p \max}}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (26)$$

Na przykład przy $L_s \approx 1000 \mu\text{H}$,

przy $C_s \approx 10^{-4} \quad 10^{-3} \quad 10^{-2} \quad 10^{-1} \quad 1 \mu\text{F}$
wypada $\sqrt{L_s C_s} \approx 0,3 \quad 1 \quad 3 \quad 10 \quad 300 \mu\text{s}$.

Pożądane do łagodzenia czoła wartości $\sqrt{L_s C_s}$ uzyskuje się przy $C_s \geq 0,1 \mu\text{F}$. Przyjmując $R_z \approx 5 \dots 20 \Omega$, $i_{p \max} \approx 150 \text{ kA}$, $\sqrt{L_s C_s} \approx 10 \mu\text{s}$ oblicza się według wzoru (26) $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx 75 \dots 300 \text{ kV } \mu\text{s}$.

Jeżeli stała czasowa $\sqrt{L_s C_s}$ jest niewielka w porównaniu z czasem trwania czoła przepięcia $R_z i_p$, to pojemność C_s nie odgrywa wyraźnej roli łagodzącej. Wówczas sformułowania (25) ... (26) dają wyniki zbyt wielkie w porównaniu z rzeczywistością i lepiej jest przyjąć wzór pomijający wpływ pojemności C_s

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx R_z \left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max} \quad (27)$$

Jeżeli zapłon odgromnika zaworowego wyprzedza maximum stromości określone według tego wzoru, to w grę wchodzi złagodzenie największej stromości przepięcia w układzie stacynym. Założenie kosinusoidalnego czoła udaru prądowego i_p — podobnie do przebiegu u na rys. 6 — prowadzi do sformułowania

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx R_z \left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max} \frac{2 \sqrt{R_z i_{p \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{R_z i_{p \max}}$$

Przy $u_{o \max} \approx 0,02 \quad 0,05 \quad 0,1 \quad 0,2 \quad 0,5 \cdot R_z i_{p \max}$

czynnik łagodzący $\frac{2 \sqrt{R_z i_{p \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{R_z i_{p \max}}$

byłby $0,28 \quad 0,436 \quad 0,6 \quad 0,8 \quad 1$

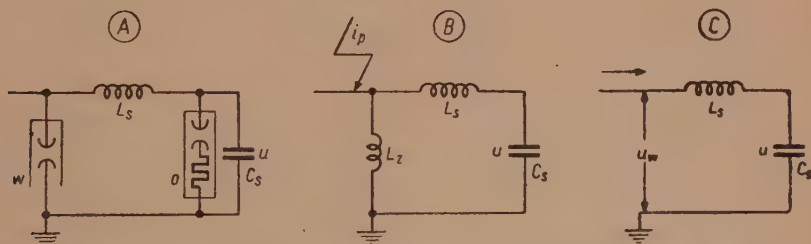
Nie ma dostatecznych podstaw doświadczalnych, ażeby przyjmować małe wartości tego czynnika łagodzącego, na przykład około 0,5, bez narażenia się na zbyt optymistyczny charakter obliczeń. Jako bardzo ostrą parę odpowiadających sobie danych piorunowych można brać

$$i_{p \max} \approx 150 \text{ kA}, \quad \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} \approx 50 \text{ kA}/\mu\text{s}.$$

Rozważania w tym rozdziale pomijają rolę zapłonowego napięcia odgromnika wydmuchowego w , co jest słuszne przy znacznie większym spadku napięciowym na oporności uziemieniowej R_z . Do częściowego oświetlenia zjawisk przy stosunkowo wysokim napięciu zapłonowym odgromnika wydmuchowego lub iskiernika (zwłaszcza przy najwyższych napięciach znamionowych) można wyzyskać warianty trzeci i czwarty sformułowań w rozdziale 5.

5. POŻYTECZNA WSPÓŁPRACA Z POJEMNOŚCIĄ STACYJNĄ PRZY WSPÓLNYM UZIEMIENIU PO DWÓCH STRONACH INDUKCYJNOŚCI

Przechodzimy do układu przedstawionego na rys. 7 w części (A). Połączenie uziemień z dwóch stron indukcyjności L_s pozwala uniknąć poważniejszej roli wielkiego iloczynu $R_z i_{p \max}$, który występuje w sformułowaniach poprzedniego rozdziału dla przypadku z oddzielnymi uziemieniami.



Rys. 7. Układ z indukcyjnością L_s odgradzającą pojemność stacyjną C oraz odgromnik zaworowy o od linii napowietrznej i ze wspólnym uziemieniem; (A) — układ pierwotny; (B) — układ zastępczy uwzględniający w gałęzi odgromnika wydmuchowego tylko indukcyjność L_z ; (C) — układ zastępczy uwzględniający w gałęzi odgromnika wydmuchowego tylko napięcie zapłonowe u_w ; obydwa układy zastępcze dla warunków przed zapłonem odgromnika zaworowego.

W pierwszym wariantcie teoretycznego ujęcia zjawisk w tak chronionej stacji bierzemy w rachubę indukcyjność L_z gałęzi odgromnika wydmuchowego w — podobnie do rozważań w rozdziale 3. Pomijając wpływ ostrza napięciowego zapłonowego na odgromniku w (jako niewielki w porównaniu ze spadkiem indukcyjnym na L_z) oraz ograniczając się do zjawisk

przed zapłonem lub bez zapłonu odgromnika zaworowego o przechodzimy do układu zastępczego (B) na rys. 7. Rozpatrujemy znowu bezpośrednie uderzenie pioruna po stronie liniowej dławika L_s .

Dla układu tego wyprowadza się równanie różniczkowe

$$\left. \begin{aligned} u + (L_s + L_z) C_s \frac{d^2 u}{dt^2} &= L_z \frac{di_p}{dt}, \\ u [1 + (L_s + L_z) C_s p^2] &= L_z i_p p. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Jeżeli zakłada się znowu pionowe czoło i wykładniczy grzbiet udaru prądowego i_p , według wzoru (1), to otrzymuje się rozwiązanie w postaci operatorowej

$$u = i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{1}{C_s} \frac{p^2}{\left(p + \frac{1}{T_w}\right) \left[p^2 + \frac{1}{(L_s + L_z) C_s}\right]}. \quad (29)$$

Stosując wzory rachunku operatorowego dochodzi się ostatecznie do rozwiązania

$$u = i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{T_w}{C_s} \left\{ - \frac{1}{1 + \frac{T_w^2}{(L_s + L_z) C_s}} \exp\left(-\frac{t}{T_w}\right) + \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{T_w^2}{(L_s + L_z) C_s}}} \cos\left[\frac{t}{\sqrt{(L_s + L_z) C_s}} - \lambda\right] \right\}, \quad (30)$$

gdzie $\lambda = \arctg \frac{1}{\sqrt{(L_s + L_z) C_s}}$.

Rysunek 8 przedstawia przykłady przebiegów napięcia u przy różnych wartościach stosunku stałej czasowej $\sqrt{(L_s + L_z) C_s}$ do T_w : (A) - 1, (B) - $\frac{1}{3}$, (C) - $\frac{1}{10}$. Przykłady te, a zwłaszcza (B) i (C), ilustrują dobrze zjawiska w układach ochronnych z kondensatorami, przy

$$C_s \approx 0,1 \dots 1 \mu F, \quad L_s + L_z \approx 500 \dots 1000 \mu H.$$

Widoczna jest przewaga składowej oscylacyjnej napięcia u nad składową wykładniczą w tych warunkach.

W chwili początkowej $t=0$ stromość wzrostu napięcia

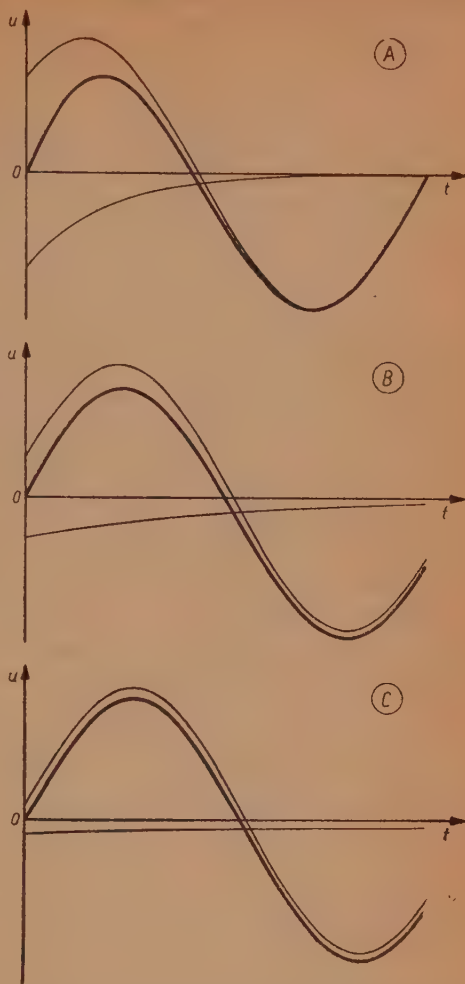
$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} = i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{1}{C_s}. \quad (31)$$

Wynik ten odpowiada prądowi początkowemu określonego według wzoru (16). Jest to zrozumiałe, gdyż również w tym przypadku o początkowym rozplywie prądów decydują tylko stałe L_s , L_z .

Możliwość skutecznego ograniczenia wartości szczytowej przepięcia u_{\max} przez grę indukcyjności L_s oraz pojemności C_s istniałaby tylko przy bardzo wielkich wartościach C_s , kiedy stała czasowa $\sqrt{(L_s + L_z)C_s}$ wypadłaby znaczna w porównaniu ze stałą T_w . Raczej powierza się to zadanie odgromnikom zaworowym. Jeżeli zapłon odgromnika zaworowego występuje przy niewielkiej wartości chwilowej napięcia u w porównaniu z wartością szczytową osiągalną bez zapłonu, to wzór (31) może nieźle charakteryzować stromość występującą przed zapłonem odgromnika zaworowego.

Wariant pierwszy pomija ograniczenie stromości wzrostu prądu i_p obostrzając w ten sposób wyniki — w stopniu niekiedy niedopuszczalnym. Mianowicie przy małej pojemności C_s , w urządzeniu bez kondensatorów, stała czasowa $\sqrt{(L_s + L_z)C_s}$ może wypadać niewielka w porównaniu z czasem trwania czoła i_p . Wtedy oscylacje napięcia u wypadają daleko słabsze, niż wynikałoby z prądu $i_{p\max} \frac{L_z}{L_s + L_z}$, który występuje we wzorach (30) i (31); stromość wzrostu napięcia u może być znacznie mniejsza niż według wzoru (31).

Jeżeli czoło prądu i_p jest bardzo długie w porównaniu ze stałą czasową $\sqrt{(L_s + L_z)C_s}$, co zdarza się często w układach bez kondensatorów, to można pominąć wpływ łagodzący pojemności C_s i przyjąć wariant drugi sformułowań



Rys. 8. Przykłady przebiegów przepięcia u na pojemności stacyjnej C_s odgrodzonej od miejsca uderzenia pioruna indukcyjnością L_s , przy wspólnym uziemieniu, przy prądzie piorunowym o pionowym czole i o stałej czasowej T_w wykładniczego grzbietu, przy uwzględnieniu tylko indukcyjności L_z w gałęzi odgromnika wydmuchowego, przy różnych wartościach stosunku stałej czasowej $\sqrt{(L_s + L_z)C_s}$ do T_w : (A) — 1, (B) — $\frac{1}{3}$, (C) — $\frac{1}{10}$; linie cienkie — składowa wykładnicza o stałej czasowej T_w oraz składowa oscylacyjna przepięcia u .

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx L_z \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2}\right)_{\max} \quad (32)$$

Jest to ujęcie podobne jak w końcu rozdziału 4, ale zamiast stromości spadku napięciowego uziemieniowego $R_z i_p$ bierze się tutaj w rachubę stromość spadku indukcyjnego na L_z . Przyjmuje się przy tym, że prawie cały prąd piorunowy i_p płynie przez gałąź L_z w układzie (B) na rys. 7.

Druga pochodna $\left(\frac{d^2 i_p}{dt^2}\right)_{\max}$ nie figuruje wśród danych piorunowych pochodzących bezpośrednio z badań doświadczalnych. Dane te obejmują między innymi wartość szczytową $i_{p \max}$ oraz pierwszą pochodną $\left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max}$ jako parę wyjątkowo wielkich wartości do obliczeń bardzo ostrożnych można wskazać 150 kA oraz 50 kA/μs. Ażeby na tej podstawie ocenić drugą pochodną, należy poczynić założenia w sprawie kształtu czoła prądu i_p — bez całkowicie pewnych podstaw doświadczalnych. Jeżeli przyjąć kosinusoidalne czoło prądu podobnie do rozważań w końcu rozdziału 4, to otrzymuje się zależność

$$\left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max} : \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2}\right)_{\max} = \frac{1}{2} i_{p \max} : \left(\frac{di_p}{dt}\right)_{\max}$$

Wartościom 150 kA i 50 kA/μs odpowiadałoby wtedy — po zaokrągleniu

$$\left(\frac{d^2 i_p}{dt^2}\right)_{\max} \approx 30 \text{ kA}/\mu\text{s}^2.$$

Nie ma tutaj dostatecznych podstaw, ażeby liczyć na złagodzenie stromości $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max}$ dzięki zapłonowi odgromnika zaworowego po stronie stacyjnej. Na przykład założenie kosinusoidalnego czoła prądu i_p daje maksimum drugiej pochodnej $\frac{d^2 i_p}{dt^2}$ już w chwili początkowej, a więc przed zapłonem odgromnika zaworowego.

Warianty pierwszy i drugi sformułowań matematycznych biorą w rachubę w gałęzi odgromnika wydmuchowego (rys. 7) tylko spadek napięciowy na indukcyjność L_z , a pomijają ostrze napięciowe na odgromniku w . Jest to uproszczenie właściwe głównie przy niższych napięciach znamionowych, którym odpowiadają też stosunkowo niskie napięcia zapłonowe.

Przechodzimy do wariantów, w których uwzględnia się napięcie u_w występujące między zaciskami odgromnika wydmuchowego, a pomija się spadek indukcyjny L_z . Może to być ujęcie właściwe w przypadku działania odgromnika wydmuchowego na *stosunkowo wysokie napięcie znamionowe*, któremu odpowiada wysokie ostrze napięciowe zapłonowe u_w .

Poza tym możliwy jest przypadek, kiedy przepięcie u_w na odgromniku nie powoduje zapłonu i dlatego ma przebieg stosunkowo długotrwały, niekorzystny dla dalszego układu.

Przypadkowi temu odpowiada układ zastępczy (C) przedstawiony na rys. 7. Przepięcie u_w pochodzi raczej z wielkiej odległości, a nie jest wynikiem bezpośredniego bliskiego uderzenia pioruna. Bierzemy w rachubę największą wartość $u_{w \max}$ nie powodującą zapłonu, a więc zbliżoną do napięcia zapłonowego 50-procentowego.

W wariancie trzecim rozważań przyjmujemy układ zastępczy (C) na rys. 7 oraz zakładamy dla przepięcia u_w pionowe czoło i grzbiet wykładniczy o stałej czasowej T_w — podobnie do wzoru 1. Stosujemy wprost wyniki rozważań z rozdziału 4, zastępując tylko $R_{zi \max}$ przez $u_{w \max}$. Przy $\sqrt{L_s C_s} \ll T_w$, $u_{o \max} < u_{w \max}$ otrzymujemy w ten sposób na podstawie wzoru (25) dla stromości czoła

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = \frac{\sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (33)$$

Sformułowanie to jest odpowiednie raczej tylko dla układów z kondensatorami, kiedy stała czasowa $\sqrt{L_s C_s}$ znaczna w porównaniu z czasem wzrostu przepięcia u_w usprawiedliwia założenie pionowego czoła u_w .

Dla układów bez kondensatorów właściwy jest zwykle wariant czwarty, pomijający rolę pojemności C_s — podobnie do końcowej części rozdziału 4 oraz do wariantu drugiego rozpatrzonego nieco wyżej:

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} \approx \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max} \quad (34)$$

Do oceny wartości $\left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max}$ nie ma dostatecznie pewnych podstaw.

Chodzi tutaj o warunki przepięciowe nie powodujące zapłonu odgromnika wydmuchowego z małym opóźnieniem. Takie stosunkowo niskie przepięcia mogą mieć krótkie czoła. Dlatego można by przyjąć, tytułem przybliżonej oceny,

$$u_{w \max} : \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max} \approx 1,5 \mu s.$$

zamiast wartości $3 \mu s$ przyjmować dla bardzo wielkiego udaru prądowego.

Przy bardzo niskim poziomie $u_{o \max}$ odgromnika zaworowego w porównaniu z wartością $u_{w \max}$, na przykład przy $u_{o \max} < \frac{1}{2} u_{w \max}$, można

by liczyć, że zapłon odgromnika zaworowego nie dopuszcza w stacji do pełnej stromości według wzoru (34). Można by wtedy ułożyć sfor-

mułowania łagodniejsze, wymagające założeń w sprawie kształtu czoła, podobnie jak w końcowej części rozdziału 4; w przypadku czoła kosinusoidalnego u_w otrzymałoby się

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} \approx \left(\frac{du_w}{dt}\right)_{\max} \frac{2\sqrt{u_{w\max}u_{o\max} - u_{o\max}^2}}{u_{w\max}}$$

Jednakże nie przewiduje się wyboru tak wielkiego stosunku $u_{w\max}/u_{o\max}$ i dlatego wzór (34) można uznać za odpowiedni bez dodatkowych mnożników łagodzących.

Warianty trzeci i czwarty mogą wchodzić w rachubę również w układzie z oddzielnymi uziemieniami (rozdział 4), jeżeli oporność uziemieniowa R_z jest stosunkowo bardzo mała, a napięcie zapłonowe $u_{w\max}$ bardzo wysokie. Są to warunki wyjątkowe, możliwe raczej tylko przy najwyższych napięciach znamionowych.

Porównanie ostrości czterech wariantów przeprowadzamy na przykładzie liczbowym przyjmując

$$i_{p\max} \approx 150 \text{ kA}, \quad \left(\frac{d^2i_p}{dt^2}\right)_{\max} \approx 30 \text{ kA}/\mu\text{s}^2,$$

$$u_{o\max} \approx 50 \dots 500 \text{ kV (w szerokim obszarze napięć znamionowych),}$$

$$u_{w\max} \approx 1,5 u_{o\max} \approx 75 \dots 750 \text{ kV,}$$

$$\left(\frac{du_w}{dt}\right)_{\max} \approx 50 \dots 500 \text{ kV}/\mu\text{s},$$

$$L_s \approx L_s + L_z \approx 500 \mu\text{H}, \quad L_z \approx 5 \dots 50 \mu\text{H}.$$

Obliczenia stromości wzrostu $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max}$ dają

w wariantcie	pierwszym	drugim	trzecim	czwartym
według wzoru	(31)	(32)	(33)	(34)
przy $C_s \approx 0,1 \dots 1 \mu\text{F}$ (z kondensatorami)	1,5 ... 150	150 ... 1500	3 ... 100	50 ... 150 kV/ μs
przy $C_s \approx 0,001 \dots 0,01 \mu\text{F}$ (bez kondensatorów)	150 ... 1500	150 ... 1500	30 ... 1000	50 ... 150 kV/ μs

Wyniki wyróżnione grubym drukiem odpowiadają wskazówkom o stosowności poszczególnych wariantów; wyniki nie wyróżnione nie są właściwymi rozwiązaniami. Te obliczenia przykładowe wskazują na niezbyt wielkie na ogół znaczenie wariantu czwartego.

6. SZKODLIWE SPADKI INDUKCYJNE PRZED ODGROMNIKAMI STACYJNYMI

Po rozważaniach nad różnymi odmianami pożytecznego działania indukcyjności szeregowej w układach ochrony stacyjnej poświęcamy rozdziały 6...8 szkodliwym *spadkom napięciowym na indukcyjnościach*. Chodzi tutaj o spadki napięciowe wzdłuż przewodów stacyjnych między odgromnikami a izolacją chronioną, a niekiedy również o spadki na uzwojeniach szeregowych. W dyskusjach nad różnymi wariantami przyjmujemy ogólnie, że uziemienia stacyjne osłonowe i odgromnikowe są wspólne — zgodnie z podstawowymi zasadami ochrony.

Jako pierwszy rozpatrujemy układ przedstawiony na rys. 9 w części (A). Izolacja s jest umieszczona bliżej źródła przepięcia, odgromnik zaworowy o — dalej. Indukcyjność L_i między nimi traktujemy najpierw jako *indukcyjność skupioną*. Przepięcie u na izolacji różni się od napięcia obniżonego u_o na odgromniku zaworowym o spadek indukcyjny u_i .

$$\left. \begin{aligned} u &= u_o + u_i, \\ u_i &= L_i \frac{di_i}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Wartość szczytowa spadku indukcyjnego $u_{i \max}$ może występować jednocześnie z wartością u_o zbliżoną do $u_{o \max}$, można więc zgodzić się na przybliżone sumowanie wartości szczytowych²:

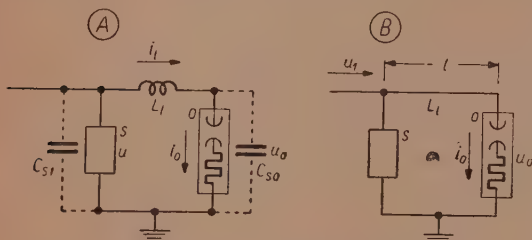
$$\left. \begin{aligned} u_{\max} &\approx u_{o \max} + u_{i \max}, \\ u_{i \max} &= L_i \left(\frac{di_i}{dt} \right)_{\max} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Na prąd i_i można patrzeć w różnych przypadkach bądź jako na prąd odbierany po stronie stacyjnej dławika L_i , prawej na rys. 9, bądź jako na prąd dostarczany po stronie liniowej, lewej na rys. 9. W pierwszym ujęciu wielką rolę odgrywa często prąd *wyładowczy* i_o w odgromniku zaworowym. W najprostszy sposób traktuje się niekiedy prąd i_i jako równy i_o . Dużym ułatwieniem w obliczeniach przybliżonych bywa często ta okoliczność, że tak rozumiany prąd odpowiada mniej więcej *warunkom zwarciovym* — wobec stosunkowo niewielkiej oporności odgromnika. W niektórych układach znaczne prądy częściowe mogą przypadać na pojemności

² W odróżnieniu od łagodniejszych sformułowań przy kojarzeniu spadków napięciowych uziemieniowych oraz indukcyjnych, kiedy można na ogół liczyć, że wierzchołki obu składowych są znacznie rozsunięte w czasie (na przykład [4, 5]).

występujące równolegle do odgromnika, C_{so} na rys. 9, na odejścia linii lub inne odgałęzienia.

W drugim ujęciu prąd i_i pochodzi co najmniej częściowo z linii napowietrznej, uderzonej blisko piorunem lub doprowadzającej przepięcie



Rys. 9. Układ ze szkodliwą indukcyjnością L_l odgradzającą izolację s od odgromnika zaworowego o , umieszczonego dalej od wejścia linii napowietrznej; (A) — układ przedstawiający indukcyjność skupioną L_l oraz pojemności skupione C_{so} , C_{s1} ; (B) — układ przedstawiający indukcyjność L_l odcinka przewodu.

z wielkiej odległości. W niektórych przypadkach wielką rolę może odgrywać pojemność występująca po stronie liniowej dławika, C_{s1} na rys. 9, dostarczając część prądu i_i lub pobierając część prądu przychodzącego z linii. Jeżeli znaczenie prądów pojemnościowych jest duże, to istnieje podobieństwo do przypadków rozpatrywanych w następnym rozdziale, kiedy chodzi o spadki indukcyjne występujące za odgromnikiem zaworowym. Podobieństwo to jest przedstawione wyraźniej w rozdziale 9.

Przechodzimy do rozważań uzupełniających nad zjawiskami falowymi w układzie przedstawionym na rys. 9 w części (B). Studia tego rodzaju są znane od dawna (na przykład [3]). Odgromnik o oraz izolacja s są odgródzone odcinkiem przewodu o długości l oraz indukcyjności $L_l = lL$. Przyjmujemy, że z lewej strony przychodzi fala przepięciowa u_i o kształcie trapezowym, której czas trwania czoła jest T_{c1} , a wartość szczytowa $u_{i \max}$. Rys. 10 przedstawia tę falę pierwotną i złożone przebiegi napięciowe w miejscu s .

Jeżeli w miejscu s nie ma warunków do powstawania odbić (tj. w przypadku jednakowej oporności falowej przewodów z obu stron), to początkowo napięcie wypadkowe u jest tutaj równe przepięciu pierwotnemu u_i aż do chwili dojścia fali odbitej u_2 od odgromnika o . Fala odbita u_2 rozpoczyna się na rys. 10 po upływie czasu $2T_l$ od chwili A , w której czoło u_i osiąga napięcie zapłonowe odgromnika $u_{o \max}$. Połowa tego opóźnienia

$$T_l = \frac{l}{v}$$

jest związana z ruchem fali u_i do odgromnika — przy szybkości v , a druga połowa — z ruchem powrotnym fali u_2 . Wykres fali u_2 na rys. 10 odpo-

wiaდა założeniu idealnej charakterystyki zaworowej odgromnika, który ogranicza przepięcie do poziomu $u_{o \max}$. Wynika stąd zależność

$$u_{2 \max} = u_{o \max} - u_{1 \max}.$$

Na rys. 10 przedstawiono przebieg napięcia wypadkowego u na izolacji s w przypadku, kiedy początek fali u_2 wypada w miejscu s jeszcze w czasie trwania czoła fali u_1 . Jest to przypadek stosunkowo małej długości l :

$$2T_l < T_{c1} \frac{u_{1 \max} - u_{o \max}}{u_{1 \max}}.$$

W napięciu u odróżniamy wyraźny ząbek indukcyjny, który nakłada się na poziom $u_{o \max}$ i przedstawia wartość szczytową $u_{i \max}$. Piszemy

$$\left. \begin{aligned} u_{\max} &= u_{o \max} + u_{i \max}, \\ u_{i \max} &= \frac{2T_l}{T_{c1}} u_{1 \max} = 2L_l \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{\max} \approx L_l \left(\frac{di_o}{dt} \right)_{\max}, \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

korzystając ze związków

$$u_{1 \max} = Zi_{1 \max}, \quad Z = vL, \quad \frac{i_{1 \max}}{T_{c1}} = \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{\max},$$

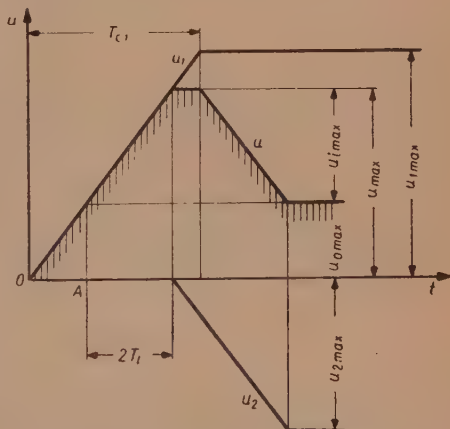
$$i_o \approx 2i_1.$$

Jest to wynik zgodny ze wzorem (36); indukcyjność odcinka przewodu odgrywa tutaj taką samą rolę jak indukcyjność skupiona. Można stwierdzić ogólnie, że wzór (36) jest odpowiedni, jeżeli we wszystkich częściach indukcyjności L_l występują jednocześnie największe stromości $\left(\frac{di_l}{dt} \right)_{\max}$ lub wartości bardzo zbliżone, tj. jeżeli odcinek przewodu jest krótki w porównaniu z czołem udaru i_1 .

W przypadku stosunkowo wielkiej długości l , kiedy

$$2T_l > T_{c1} \frac{u_{1 \max} - u_{o \max}}{u_{1 \max}},$$

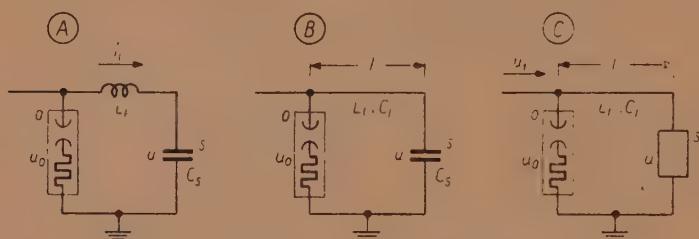
wartość szczytowa u_{\max} wypadłaby równa $u_{1 \max}$, tj. odgromnik nie obniżałby przepięcia na izolacji s , ale tylko zmniejszałby czas trwania największych wartości. Zwykle nie mamy do czynienia z takimi warunkami w urządzeniach rozdzielczych.



Rys. 10. Przebieg przepięcia u na izolacji stacyjnej w układzie z odgromnikami zaworowymi umieszczonymi dalej od wejścia linii napowietrznej, przy pominięciu pojemności skupionych: u_1 — fala pierwotna, u_2 — fala odbita od odgromnika.

7. SZKODLIWE SPADKI INDUKCYJNE ZA ODGROMNIKAMI ZAWOROWYMI

Rozpatrujemy z kolei przypadek przedstawiony na rys. 11 w części (A). Odgromnik zaworowy o jest umieszczony bliżej źródła, izolacja chroniona s dalej. Indukcyjność szeregową L_l między nimi traktujemy tutaj jako *indukcyjność skupioną*. Również w tym przypadku różnica między napię-



Rys. 11. Układy ze szkodliwą indukcyjnością L_l odgradzającą izolację s od odgromnika zaworowego o, umieszczonego bliżej wejścia linii napowietrznej; (A) — układ ze skupionymi stałymi L_l , C_s , (B) — układ z indukcyjnością L_l odcinka przewodu i ze znaczną pojemnością skupioną C_s ; (C) — układ z indukcyjnością L_l oraz pojemnością C_l przewodu i bez znacznej pojemności skupionej.

ciem u_o na odgromniku a napięciem u na izolacji s jest związana ze spadkiem indukcyjnym $L_l \frac{di_l}{dt}$. Jednakże proste wzory matematyczne z rozdziału poprzedniego nie byłyby tutaj odpowiednie jako sformułowanie ostateczne, gdyż prąd i_l nie ma w tym przypadku na ogół charakteru zwarciovego. Jest to prąd pojemnościowy

$$i_l = C_s \frac{du}{dt}.$$

Dążymy więc do wyprowadzenia wzorów, w których występowałyby wielkości określające przebiegi przepięciowe.

Założenia wyjściowe wiążemy z przebiegiem napięcia obniżonego na odgromniku zaworowym o. Jako bardzo proste i dość rozpowszechnione w innych rozważaniach przepięciowych sformułowanie przyjmujemy kształt trapezowy, czas trwania czoła T_{co} i wartość szczytową $u_{o \max}$, tj stromość

$$\left(\frac{du_o}{dt} \right)_{\max} = \frac{u_{o \max}}{T_{co}}.$$

Założenia te pomijają ostrze zapłonowe odgromnika i odpowiadają idealnej charakterystyce zaworowej. Nie przesadzamy, czy przyczyną przepię-

cia jest fala przychodząca z wielkiej odległości, czy też bezpośrednie bliskie uderzenie pioruna.

Prowadzimy najpierw rozważania nad przypadkiem prostoliniowej zmiany napięcia u_o , z jaką mamy do czynienia w czasie trwania czoła, pomijamy więc na razie zapłonowe załamanie przebiegu u_o . Piszemy

$$\left. \begin{aligned} u_o &= \frac{u_o \max}{T_{co}} t, \\ \text{lub w postaci operatorowej} \\ u_o &= \frac{u_o \max}{T_{co}} \frac{1}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Napięcie u w układzie (A) na rys. 11 czyni zadość równaniu różniczkowemu

$$\left. \begin{aligned} u + L_l C_s \frac{d^2 u}{dt^2} &= u_o, \\ \text{lub w postaci operatorowej} \\ u (1 + L_l C_s p^2) &= u_o. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Podstawienie wyrażenia operatorowego (38) daje

$$u = \frac{u_o \max}{T_{co}} \frac{1}{p (1 + L_l C_s p^2)}. \quad (40)$$

Na podstawie wzorów rachunku operatorowego przechodzi się do rozwiązania

$$u = \frac{u_o \max}{T_{co}} t - \sqrt{L_l C_s} \frac{u_o \max}{T_{co}} \sin \frac{t}{\sqrt{L_l C_s}}. \quad (41)$$

Pierwszy składnik napięcia u według tego wzoru jest napięciem u_o , drugi zaś przedstawia nakładające się oscylacje napięcia indukcyjnego o wartości szczytowej $\sqrt{L_l C_s} \frac{u_o \max}{T_{co}}$ i okresie $2\pi \sqrt{L_l C_s}$. Na rys. 12 przedstawiono w lewej części takie przebiegi napięcia u .

Dla dalszej części trapezowego przebiegu u_o , od zapłonu dającego początek poziomego grzbietu, można wyzyskać wzór (41) traktując ostre zakończenie czoła w chwili zapłonu odgromika jako nałożenie drugiej fali u_o , również rosnącej od zera prostoliniowo, ale o znaku przeciwnym. Na rys. 12 przedstawiono wynikające z dwóch fal składowych przebiegi napięcia u na pojemności C_s w trzech przypadkach szczególnych, przy różnych wartościach stosunku czasu trwania czoła T_{co} do okresu oscylacji $2\pi \sqrt{L_l C_s}$.

W części (A) na rys. 12 przedstawiono przypadek interferencji pełno-okresowej, kiedy $T_{co} = 2\pi \sqrt{L_l C_s}$. Nałożenie fali grzbietowej (pozapłono-

wej) u_o kasuje tutaj oscylacje, napięcie u biegnie dalej poziomo, zupełnie zgodnie z napięciem u_o , nie ma spiętrzenia u powyżej $u_{o \max}$. Podobnie korzystne działanie ochrony występuje również przy czasie trwania czoła T_{co} równym większej krotności parzystej $n = 4, 6, 8 \dots$ połowy okresu oscylacji $\pi/\sqrt{L_1 C_s}$. Przypadki te można określić jako *interferencję parzysto-półokresową*.

Część (B) rys. 12 przedstawia przypadek *interferencji półokresowej*, kiedy $T_{co} = \pi/\sqrt{L_1 C_s}$. Nałożenie fali grzbietowej u_o podwaja oscylacje napięcia u w porównaniu z fazą czoła. Dlatego napięcie u przekracza znacznie poziom $u_{o \max}$; *nadwyżka indukcyjna* (oscylacyjna)

$$u_{i \max} = \frac{2}{\pi} u_{o \max} = 2 \sqrt{L_1 C_s} \left(\frac{du_o}{dt} \right)_{\max} \quad (42)$$

wchodzi do zależności

$$u_{\max} = u_{o \max} + u_{i \max}.$$

Szczególnie silne spiętrzenie przepięcia u powyżej poziomu $u_{o \max}$ występuje również przy T_{co} równym dowolnej nieparzystej krotności $n = 3, 5, 7 \dots$ połowy okresu oscylacji $\pi/\sqrt{L_1 C_s}$. *Nadwyżka indukcyjna*

$$u_{i \max} = \frac{2}{n\pi} u_{o \max} = 2 \sqrt{L_1 C_s} \left(\frac{du_o}{dt} \right)_{\max} \quad (43)$$

wypada mniejsza przy większych krotnościach n , tj. przy mniejszych wartościach $\pi/\sqrt{L_1 C_s}$. Przypadki te można określić jako *interferencję nieparzysto-półokresową*.

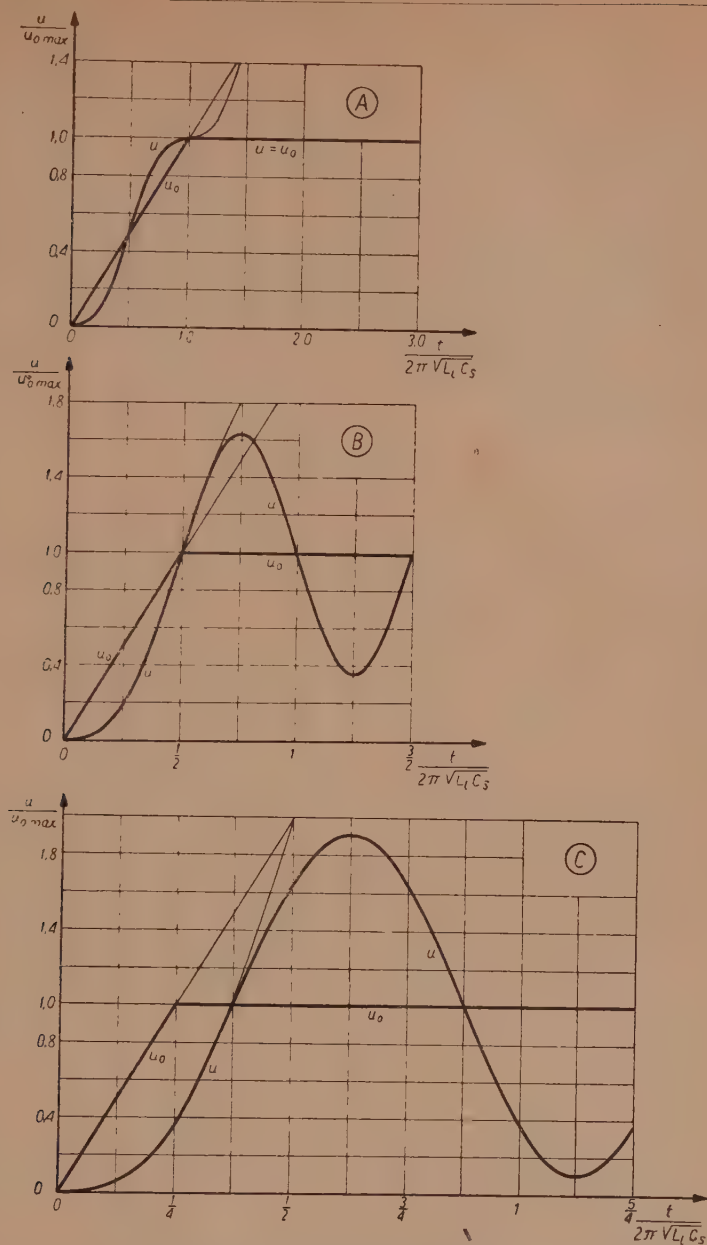
Rys. 12 przedstawia ponadto w części (C) przypadek *większego okresu oscylacji*, kiedy $T_{co} = \frac{1}{2} \pi/\sqrt{L_1 C_s}$. Nałożenie fali grzbietowej u_o przesuwając oscylacje wypadkowe o $\frac{1}{4} \pi$, a nadwyżka oscylacyjna wypada

$$u_{i \max} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} u_{o \max} = \sqrt{2} \sqrt{L_1 C_s} \left(\frac{du_o}{dt} \right)_{\max}.$$

Łatwo stwierdzić, że dalsze zwiększanie okresu oscylacji w stosunku do T_{co} powoduje wzrost nadwyżki indukcyjnej $u_{i \max}$ oraz wartości szczytowej u_{\max} , ale już niezbyt silny. Zbliżamy się w ten sposób do *najwyższej granicy*

$$u_{i \max} = u_{o \max}, \quad u_{o \max} = 2u_{o \max}. \quad (44)$$

W rzeczywistości zjawiska mogą znacznie odbiegać od naszych założeń. Czoło napięcia u_o może mieć kształt nie tak sprzyjający wzbudzeniu oscy-



Rys. 12. Przykłady przebiegów przepięcia u na pojemności stacyjnej C_s odgródzonej indukcyjnością L_l od odgromnika zaworowego umieszczonego bliżej wejścia linii napowietrznej, przy trapezowym przebiegu napięcia u_0 na odgromniku, przy różnych stosunkach czasu trwania czoła T_{co} do połowy okresu oscylacji $\pi\sqrt{L_1 C_s}$; (A) — 2, (B) — 1, (C) — $\frac{1}{2}$; linie cienkie — przedłużenia przebiegów czołowych.

lacyj jak przyjęty kształt prostoliniowy; chodzi zwłaszcza o początek czoła, który zamiast przyjętego ostrego wzrostu może przedstawiać łagodne zagięcie. Osłabienie zaś lub zniknięcie oscylacyj w okresie czoła usuwa jaskrawe różnice między przypadkami interferencji parzysto-półokresowej oraz nieparzysto-półokresowej. Dopiero po zapłonie odgromnika wzbudzenie silnych oscylacyj jest dość prawdopodobne — wobec nagłego załamania krzywej u_o . Można więc poprzestać w obliczeniach na oscylacjach słabszych, bez podwojenia wynikającego z niekorzystnej interferencji, tj. bez współczynnika 2 występującego we wzorach (42), (43). Piszemy więc w przypadku małych wartości $\sqrt{L_i C_s}$ w porównaniu z czasem trwania czoła T_{co}

$$u_{i \max} \approx \sqrt{L_i C_s} \left(\frac{du_o}{dt} \right)_{\max} \quad (45)$$

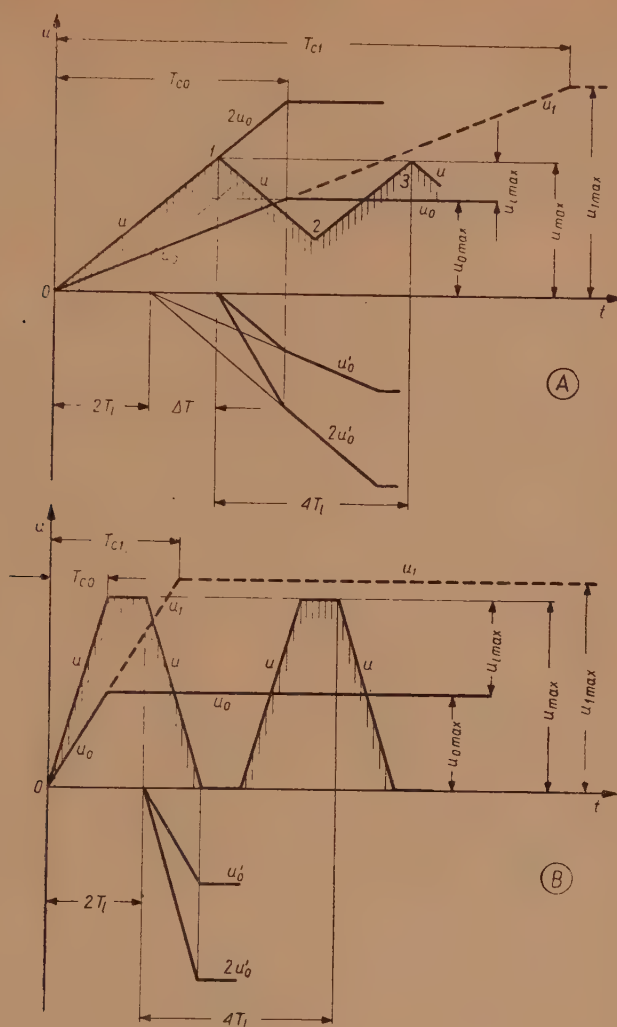
Dotychczasowe rozważania pomijają tłumienie oscylacyj. Poważnym czynnikiem tłumiącym może być oporność odgromnika zaworowego (określana na przykład jako nachylenie przebiegu napięcia w funkcji prądu); tłumienie tego rodzaju wchodzi w grę zwłaszcza przy wyższych napięciach znamionowych, gdyż wyższe słupy zmienneoporowe przedstawiają większe oporności. Również oporności falowe linii mogą dawać silne tłumienie. Ulot lub inne wyładowania niezupełne odgrywają raczej niezbyt wielką rolę, jeżeli prądy tych wyładowań nie przekraczają rzędu 1 ... 10 A.

Sformułowania matematyczne otrzymane dla układu (A) na rys. 11 można przyjąć również dla układu (B), jeżeli długość l odcinka przewodu między odgromnikiem o oraz izolacją s jest stosunkowo niewielka, a pojemność rozłożona $C_l = lC$ jest mała w porównaniu z pojemnością C_s skupioną na końcu. Wtedy można traktować indukcyjność całkowitą $L_l = lL$ podobnie jak indukcyjność skupioną w układzie (A), pojemność zaś C_l pomijać lub włączać do wartości C_s . Warunki takie występują często w urządzeniach stacyjnych.

Natomiast w przypadku przedstawionym w części (C) rys. 11 pojemność odcinka przewodu C_l jest znacznie większa niż pojemność C_s skupiona na końcu. Przyjmujemy krańcowe warunki całkowicie bez pojemności C_s i badamy przebiegi napięcia u jako wynik gry odbić falowych na końcach odcinka l .

Na rys. 13 przedstawiono dwa warianty przebiegów napięcia u przy trapezowej fali pierwotnej u_1 o wartości szczytowej $u_{1 \max}$ oraz o czasie trwania czoła T_{c1} , a więc o stromości

$$\left(\frac{du_1}{dt} \right)_{\max} = \frac{u_{1 \max}}{T_{c1}}.$$



Rys. 13. Przebiegi przepięcia u na izolacji stacyjnej w układzie z odgromnikami zaworowymi umieszczonymi bliżej wejścia linii napowietrznej, przy pominięciu pojemności skupionych; przypadki różnych stosunków czasu biegu fali w odcinku przewodu stacyjnego T_l oraz czasu trwania czoła przepięcia na odgromniku T_{co} : (A) — $2T_l < T_{co}$, (B) — $2T_l > T_{co}$; u_1 — fala pierwotna; u_0 — pierwsza fala przepuszczona poza odgromnik ku izolacji; u'_0 — następna fala odbita od odgromnika ku izolacji.

Przyjmuje się znowu idealne własności zaworowe odgromnika o przedstawiając po zapłonie poziome ograniczenie przepięcia do $u_{o\max}$. W wyniku czas trwania czoła przepięcia u_o na odgromniku jest skrócony do

$$T_{co} = T_{c1} \frac{u_{o\max}}{u_{1\max}}.$$

Traktujemy punkt s jako otwarty koniec przewodu, gdzie odbicie spiętrza przepięcie do podwójnej fali przychozącej. W grze kolejnych odbić na obu końcach wielką rolę odgrywa czas biegu fali w odcinku l

$$T_l = \frac{l}{v} = \sqrt{L_l C_l}.$$

W części (A) rys. 13 przedstawiono przypadek $2T_l < T_{co}$, tj. przypadek stosunkowo *krótkiego przewodu*, a *długiego czoła*. Pierwsza fala u_o dochodząca do izolacji s ma wartość szczytową $u_{o\max}$ i czas trwania czoła T_c . Pierwsze odbicie na końcu s daje podwójnie spiętrzone wartości napięcia wypadkowego u , które utrzymują się tutaj aż do przyjścia następnej fali u'_o , odbitej od odgromnika o . Na opóźnienie fali u'_o względem u_o składa się

- 1) czas biegu pierwszej fali odbitej od s do o , równy T_l ,
- 2) czas biegu fali u'_o od o do s , również T_l ,
- 3) dodatkowe opóźnienie w wytworzeniu fali odbitej na odgromniku o , równe ΔT .

Opóźnienie ΔT występuje od chwili przyjścia na odgromnik pierwszej fali odbitej od końca s (spiętrzającej), do chwili osiągnięcia na odgromniku napięcia zapłonowego, kiedy zostaje wysłana fala u'_o . Rys 13 przedstawia konstrukcję geometryczną odcinka ΔT . Fala u'_o jest wykreślona w części (A) rys. 13 po upływie czasu $2T_l + \Delta T$ od chwili przyjścia fali u_o . Odbicie na końcu s daje znowu podwójne spiętrzenie tej fali. Wynika stąd odcinek 1—2 przebiegu przepięcia wypadkowego u . Następną falą odbitą od odgromnika prowadzi do odcinka 2—3 przebiegu u .

Dochodzimy w ten sposób do przebiegu oscylacyjnego. Okres oscylacji jest $4T_l$, a czas trwania pojedynczego ząbka oscylacyjnego napięcia u powyżej poziomu $u_{o\max}$ jest $2T_l$. Wysokość ząbka oscylacyjnego, którą można traktować — wzorem poprzednich rozważań — jako *nadwyżkę indukcyjną*,

$$u_{i\max} = 2T_l \frac{u_{o\max}}{T_{co}} = 2\sqrt{L_l C_l} \left(\frac{du_1}{dt} \right)_{\max}. \quad (46)$$

Zależność ta odpowiada ostrzejszym sformułowaniom (42), (43), wyprowadzonym dla układu ze skupionymi stałymi L_l , C_s . Można też przejść — na podstawie zależności między falami u_1 , i_1 — do wzoru

$$u_{i\max} = 2L_l \left(\frac{di_1}{dt} \right)_{\max}.$$

Część (B) rys. 13 przedstawia przypadek $2T_l > T_{co}$, tj. przypadek stosunkowo *długiego przewodu, a krótkiego czoła*. Fale u_o, u'_o są wykreślone podobnie jak w wariancie (A), z tą jednak różnicą, że odpada dodatkowe opóźnienie ΔT i pozostaje tylko odstęp czasu $2T_l$. Pierwsza fala odbita od końca s (spiętrzająca) przychodzi bowiem na odgromnik o już po jego zapłonie, tak że wysłanie fali u'_o odbywa się natychmiast.

Z gry tych fal i następnych fal odbitych wynikają oscylacje również o okresie $4T_l$ i o czasie trwania pojedynczego ząbka napięciowego u powyżej poziomu $u_{o\max}$ równym $2T_l$. Wysokość tego ząbka, tj. *nadwyżka indukcyjna*

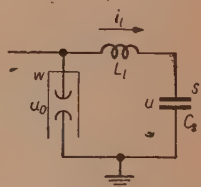
$$u_{i\max} = u_{o\max}, \quad (47)$$

podobnie do zależności (44) dla układu ze stałymi skupionymi L_l, C_s . Spiętrzenie wartości u_{\max} jest podwójne.

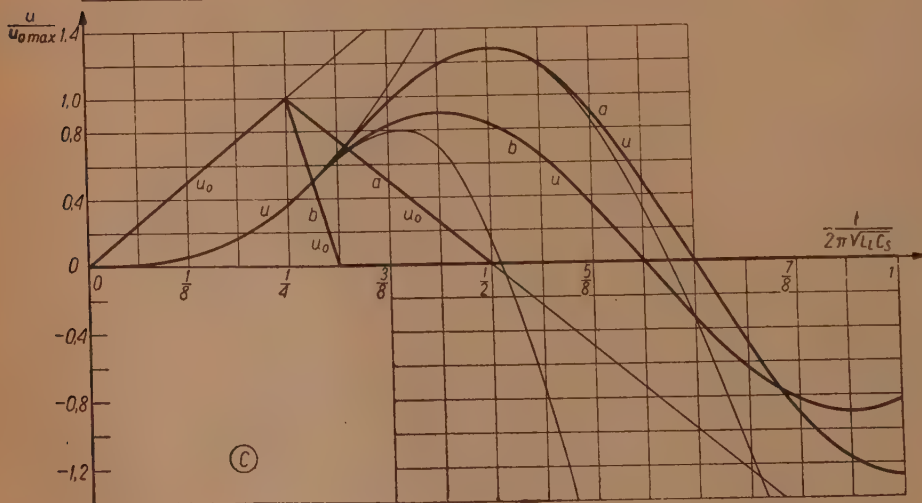
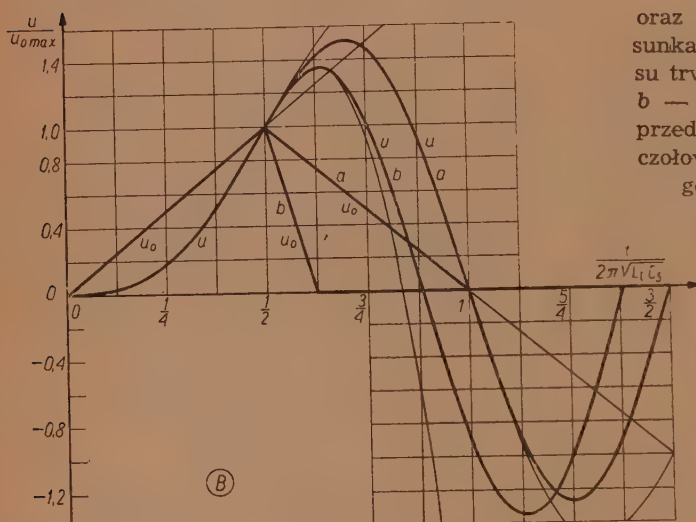
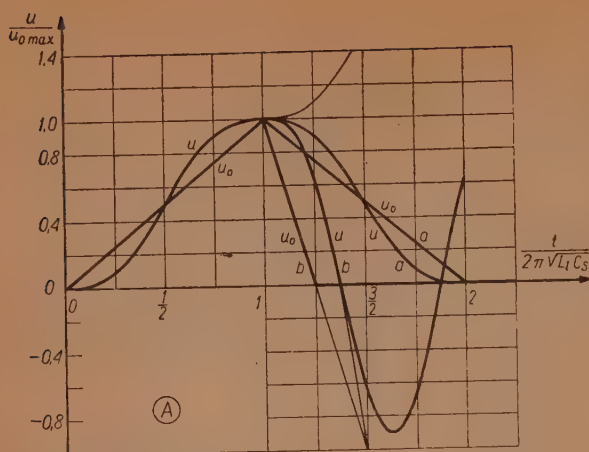
8. SZKODLIWE SPADKI INDUKCYJNE ZA ODGROMNIKAMI WYDMUCHOWYMI LUB ISKIERNIKAMI

Na rys. 14 przedstawiono *układ* podobny jak w części (A) rys. 11, ale z odgromnikiem wydmuchowym w (lub iskiernikiem) zamiast odgromnika zaworowego. Rozpatrujemy oscylacje napięcia u na izolacji s umieszczonej za odgromnikiem (dalej od źródła przepięcia) w przypadku, gdy zachodzi ucięcie udaru u_o na odgromniku. Podobnie do rozważań w rozdziale poprzednim posługujemy się wzorem (41) dla przebiegu napięcia u przy *prostoliniowym wzroście napięcia u_o* od zera; przebieg uciętego udaru u_o traktujemy jako wynik kolejnego nakładania kilku procesów prostoliniowych.

Na rys. 15 przedstawiono *dwa warianty trójkątnego przebiegu* udaru uciętego u_o : *a* — z łagodniejszym ucięciem, o stromości takiej samej jak na czole, *b* — z bardziej raptownym ucięciem, o stromości 4 razy większej. W przypadku *a* — początek ucięcia u_o traktujemy jako wynik nałożenia drugiego przebiegu składowego prostoliniowego o stromości 2 razy większej od stromości czoła i o znaku przeciwnym, a koniec ucięcia (przejście w linię zerową) jako wynik nałożenia trzeciego przebiegu prostoliniowego o stromości takiej samej jak w przebiegu czołowym i o znaku zgodnym. W wariancie *b* drugi przebieg składowy ma stromość pięciokrotną, a trzeci przebieg stromość czterokrotną. Wykresy napięcia u są wykonane w trzech przypadkach (A), (B), (C), przy różnych wartościach stosunku czasu trwania czoła T_{co} do okresu oscylacji $2\pi\sqrt{L_l C_s}$, podobnie jak na rys. 12 dla układu z odgromnikiem zaworowym.



Rys. 14. Układ z indukcyjnością L_l odgradzającą izolację chronioną od odgromnika wydmuchowego w umieszczonego bliżej wejścia linii napowietrznej.



Rys. 15. Przykłady przebiegu przepięcia u na pojemności stacyjnej C_s odgrodzonej indukcyjnością L_l od odgromnika wydmuchowego umieszczonego bliżej wejścia linii napowietrznej, przy trójkątnym przebiegu napięcia u_0 na odgromniku, przy różnych stosunkach czasu trwania czoła T_{co} do połowy okresu oscylacji $\pi/\sqrt{L_l C_s}$: (A) — 2, (B) — 1,

(C) — $\frac{1}{2}$,

oraz przy różnych stosunkach czasu T_{co} do czasu trwania ucięcia: a — 1, b — 4; linie cienkie — przedłużenia przebiegów czołowych oraz przebiegów ucięciowych.

W przypadku (A), przy $T_{co} = 2\pi \sqrt{L_i C_s}$, można mówić — zgodnie z określeniami z poprzedniego rozdziału — o *interferencji pełnookresowej*. Przepięcie u nie spiętrza się powyżej poziomu $u_{o \max}$, jakkolwiek występują oscylacje również w obszarze ucięcia. Oscylacje dają tylko łagodne zaokrąglenie szczytu napięcia u w porównaniu z ostrzem u_o . W wariancie a unika się ponadto oscylacyjnego przejścia napięcia u do znacznych wartości drugiego znaku; natomiast wariant b nie przedstawia tej zalety. Korzystną ochronę izolacji, bez spiętrzenia napięcia u powyżej poziomu $u_{o \max}$, uzyskuje się również w przypadkach *interferencji parzysto-półokresowej*, kiedy czas T_{co} jest równy dowolnej większej krotności parzystej $n = 4, 6, 8 \dots$ połowy okresu oscylacji $\pi \sqrt{L_i C_s}$.

W przypadku (B), przy $T_{co} = \pi \sqrt{L_i C_s}$, mamy do czynienia z niekorzystną *interferencją półokresową*. Wartość szczytowa u_{\max} przewyższa tutaj o kilkadziesiąt procent poziom $u_{o \max}$; jednakże w porównaniu z częścią (B) rys. 12 wartość u_{\max} wypada niższa, zwłaszcza w wariancie b — przy bardziej stromym ucięciu udaru u_o . Uwagę zwraca też strome opadanie krzywej i przechodzenie do znacznych wartości znaku drugiego. Silne spiętrzanie przepięcia u powyżej $u_{o \max}$ występuje również w innych przypadkach *interferencji nieparzysto-półokresowej*, kiedy T_{co} jest dowolną większą nieparzystą krotnością $n = 3, 5, 7 \dots$ połowy okresu $\pi \sqrt{L_i C_s}$.

W przypadku (C) mamy $T_{co} = \frac{1}{2} \pi \sqrt{L_i C_s}$, przy *stosunkowo wielkim okresie oscylacyj.* W porównaniu z częścią (C) rys. 13 stwierdzamy tutaj korzystny wpływ ucięcia, zwłaszcza w wariancie b , kiedy wartość szczytowa u_{\max} wypada niższa od $u_{o \max}$.

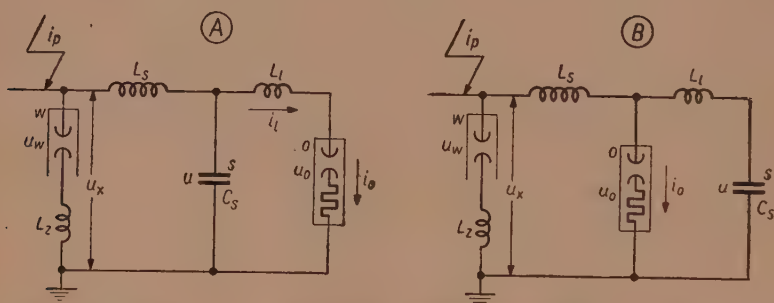
Porównanie ucięcia u_o , przedstawiającego skok napięciowy $u_{o \max}$, z oscylacyjnym przebiegiem u , dającym skok całkowity często znacznie większy, nawet powyżej $2 u_{o \max}$, a niekiedy również stromość znacznie większą — jest ciekawe w związku z *niebezpieczeństwem udarów uciętych dla transformatorów*. Przepięcia międzycewkowe, międzywarstwowe i międzyzwojowe w transformatorach zależą w znacznej mierze od wielkości skoku napięciowego na zacisku wejściowym oraz od stromości. Rys. 15 ilustruje na kilku przykładach wielką różnorodność tych warunków napięciowych w układach rozdzielczych — przy różnych pojemnościach oraz indukcyjnościach.

Szczególnie niebezpieczny jest przypadek (B) na rys. 15, kiedy skok napięciowy poucięciowy wypada około $(2,7 \dots 2,8) u_{o \max}$, a stromość jest znaczna w porównaniu z ucięciem u_o (zwłaszcza w wariancie a). Przypadek (C), z większą indukcyjnością L_i lub pojemnością C_s , wykazuje stosunkowo łagodny przebieg u w wariancie b , mianowicie skok napięciowy około $1,8 u_{o \max}$ i stromość mniejszą niż w ucięciu u_o ; natomiast wariant a

przedstawia się jeszcze dość ostro. Można sformułować ogólny wniosek, że przy zwiększaniu stałych L_I , C_s , na przykład przy zwiększaniu długości przewodów, przebiegi najpierw nabierają większej ostrości dla transformatorów, a następnie stają się łagodniejsze.

9. SZKODLIWE SPADKI INDUKCYJNE W UKŁADACH Z DŁAWIKAMI OCHRONNYMI. ZALEŻNOŚCI OGÓLNE

Rozdziały 6, 7 i 8 zawierają rozważania podstawowe nad szkodliwymi spadkami napięciowymi na indukcyjnościach przed lub za odgromnikami stacyjnymi. Wyprowadzone zależności pozwalają wyjaśnić częściowo charakter zjawisk i znaczenie różnych czynników, ale nie są dogodne do zastosowań obliczeniowych. Wzór (36) na spadki indukcyjne przed odgromnikami wprowadza w sposób ogólnikowy stromość prądu i_I , którego określenie może być trudne i wątpliwe; pożądane są zależności, w których wy-



Rys. 16. Przypadki niekorzystnego skupienia pojemności stacyjnej C_s w układach ochronnych z odgromnikami zaworowymi o, dławikami szeregowymi L_s oraz odgromnikami wydmuchowymi w; (A) — odgromniki o za izolacją s; (B) — odgromniki o przed izolacją s.

stępowałyby wielkości lepiej uchwytne. Sformułowania zaś w rozdziałach 7 i 8 dla spadków za odgromnikami zawierają stromość napięcia u_o , która przeważnie nie jest znana bezpośrednio, a poza tym są związane z dość sztucznym założeniem prostoliniowego przebiegu u_o ; pożądane są zależności, które by zawierały wielkości łatwiej dostępne do bezpośredniej oceny i unikały wątpliwych założeń.

W rozdziale niniejszym dążymy do takich sformułowań już tylko dla układów z odgromnikami zaworowymi i z dławikami ochronnymi, z odgromnikami wydmuchowymi tylko po stronie liniowej — według propozycji z rozdziału 1. Na rys. 16 przedstawiono dwa najprostsze układy, w których mamy do czynienia z niekorzystnym rozmieszczeniem pojemności stacyjnej C_s , oddzielonej w całości indukcyjnością przewodów L_I od odgromnika zaworowego o. Układy różnią się tylko tym, że w przypadku

(A) pojemność C_s jest umieszczona przed odgromnikiem, jak w rozważaniach w rozdziale 6, a w przypadku (B) za odgromnikiem, jak w rozdziale 7.

W rachubę wchodzi duża rozmaitość możliwych przebiegów przepięciowych, zależnych od gry różnych stałych czasowych i od warunków udarowych na końcu liniowym dławika. Ażeby uniknąć powtarzania rozważań matematycznych w różnych wariantach, wprowadzamy ogólnie znak u_x dla *udaru napięciowego po stronie liniowej dławika* — względem uzziemienia (a nie względem odległej ziemi). Może to być bądź spadek napięciowy na indukcyjności L_z (warianty pierwszy i drugi w rozdziale 5), bądź napięcie zapłonowe u_w lub ostrze napięciowe zapłonowe (warianty trzeci i czwarty w rozdziale 5), bądź wypadkowa tych dwóch napięć, jeżeli żadne z nich nie jest pomijalne.

Rozpatrujemy najpierw zjawiska *po zapłonie odgromnika zaworowego*. Zakładamy znowu idealne ograniczenie przepięcia na odgromniku zaworowym do poziomu $u_{o\max}$. Dla układu (A) na rys. 16 wyprowadzamy równanie

$$\left(1 + \frac{L_t}{L_s}\right)u + L_t C_s \frac{d^2 u}{dt^2} = u_{o\max} + \frac{L_t}{L_s} u_x, \quad (48)$$

a dla układu (B)

$$u + L_t C_s \frac{d^2 u}{dt^2} = u_{o\max}. \quad (49)$$

Jest to powtórzenie równania różniczkowego (39) — z tą różnicą, że obecnie występuje wartość stała $u_{o\max}$, a nie prostoliniowo zmieniające się napięcie u_o .

Zajmujemy się najpierw rozwiązaniem prostszego równania różniczkowego (49) dla *przepięcia spiętrzonego za odgromnikiem zaworowym*. Ogólnie odpowiednia jest postać rozwiązania

$$u = u_{o\max} + u_{i\max} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_t C_s}} - \lambda\right), \quad (50)$$

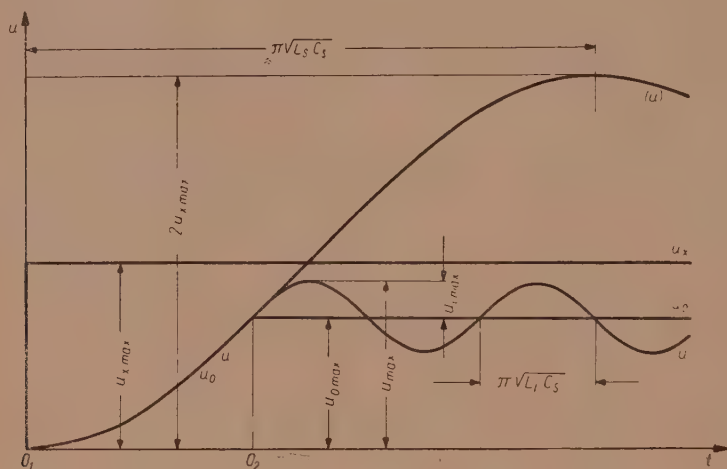
z możliwością dostosowania wartości $u_{i\max}$, λ do szczególnych warunków początkowych na pojemności w chwili zapłonu odgromnika, mianowicie

$$u_{\text{pocz}} \text{ oraz } \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}.$$

Jeżeli przed zapłonem spadek napięciowy na stosunkowo niewielkiej indukcyjności L_t jest bardzo mały w porównaniu z innymi napięciami wchodzącymi w rachubę, to można przyjąć w przybliżeniu $u_{\text{pocz}} \approx u_{o\max}$, co prowadzi do bardzo prostego rozwiązania $\lambda \approx 0$,

$$u_{i\max} \approx \sqrt{L_t C_s} \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}. \quad (51)$$

Przykład takiego przebiegu podano na rys. 17; przed chwilą 0_2 zapłonu odgromnika zaworowego przebiegi napięć u_o , u są zgodne — przy pomijalnym spadku napięciowym na indukcyjności L_l . Sformułowanie (51) jest zbliżone do wzoru (45) z rozdziału 7, ale obecnie podkreślone jest szczególne znaczenie wartości początkowej $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}$ dla oscylacji występujących po zapłonie.



Rys. 17. Przykład przebiegu przepięcia u na izolacji chronionej w układzie z odgromnikiem zaworowym, dławikiem szeregowym i odgromnikiem wydmuchowym, w przypadku prostokątnego przebiegu napięcia u_x na gałęzi odgromnika wydmuchowego; u_o — przebieg napięcia na odgromniku zaworowym o idealnej charakterystyce; (u) — przebieg napięcia na izolacji bez interwencji odgromnika zaworowego.

Można też wziąć w rachubę spadek napięciowy na L_l w chwili zapłonu odgromnika zaworowego, powodujący raczej nadwyżkę napięcia $u_{o \max}$ nad napięciem początkowym u_{pocz} na pojemności C_s . Otrzymuje się wtedy

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\approx \arctg \frac{u_{o \max} - u_{\text{pocz}}}{\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}}, \\ u_{\text{t max}} &\approx \sqrt{L_l C_s \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}^2 + (u_{o \max} - u_{\text{pocz}})^2}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Postać pierwiastkowa ostatniej zależności wskazuje, że nawet przy niezbyt radykalnej przewadze składnika $\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}$ nad $(u_{o \max} - u_{\text{pocz}})$ sformułowanie uproszczone (51) można uznać jako zadowalające.

Zajmujemy się z kolei bardziej złożonym równaniem różniczkowym (48) dla *przebiegu napięcia spiętrzanego przed odgromnikiem zaworowym*. Jeżeli ułamek $\frac{L_l}{L_s}$ jest bardzo mały i jeżeli wartości u_x nie są zbyt wielkie w porównaniu z napięciem $u_{0\max}$, to można przejść stosując przybliżone uproszczenie do równania różniczkowego (49) i przyjąć rozwiązanie według wzorów (50), (51). Jednakże sformułowania te kryją w tym przypadku większe niebezpieczeństwo dużych odstępstw od rzeczywistości niż dla układu (B) na rys. 16.

Zastrzeżenia można wysunąć zwłaszcza przeciw pominięciu napięcia $\frac{L_l}{L_s} u_x$ w równaniu (48), gdyż w niektórych przypadkach napięcie u_x może być bardzo wysokie w porównaniu z $u_{0\max}$. Natomiast składnik $\frac{L_l}{L_s} u$ odgrywa na ogół tylko niewielką rolę. Zastępujemy go dość zbliżonym napięciem $\frac{L_l}{L_s} u_{0\max}$, ażeby przejść do wygodniejszego sformułowania przybliżonego

$$u + L_l C_s \frac{d^2 u}{dt^2} \approx u_{0\max} + \frac{L_l}{L_s} (u_x - u_{0\max}). \quad (53)$$

Zależnie od przebiegu napięcia u_x można by znajdować różne rozwiązania.

Stosunkowo prosty jest *przypadek stałej wartości napięcia po stronie liniowej dławika* $u_x \text{ const}$. Może to być ujęcie zbliżone do rzeczywistości, jeżeli napięcie u_x zmienia się tylko niezbyt silnie w ciągu stosunkowo krótkiego okresu oscylacji $2\pi\sqrt{L_l C_s}$. Rozwiązanie jest podobne do wzoru (50):

$$u \approx u_{0\max} + \frac{L_l}{L_s} (u_{x\text{const}} - u_{0\max}) + u_{i1\max} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{L_l C_s}} - \lambda\right) \quad (54)$$

Warunki napięciowe początkowe na pojemności C_s (w chwili zapłonu odgromnika zaworowego) $u_{\text{pocz}} = u_{0\max}$, $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}$ pozwalają określić

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\approx \arctg \frac{\frac{L_l}{L_s} (u_{x\text{const}} - u_{0\max})}{\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}}, \\ u_{i1\max} &\approx \sqrt{L_l C_s \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}^2 + \left(\frac{L_l}{L_s}\right)^2 (u_{x\text{const}} - u_{0\max})^2}. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

Całkowita nadwyżka indukcyjna $u_{i \max}$ napięcia u_{\max} nad poziomem $u_{o \max}$ zawiera według wzoru (54) dodatkowy składnik, można więc napisać

$$u_{i \max} \approx \frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max}) + u_{i1 \max}, \quad (56)$$

Jeżeli składowa $u_{i1 \max}$ jest większa, to można przejść do sformułowań przybliżonych

$$\begin{aligned} u_{i1 \max} &\approx \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}}, \\ u_{i \max} &\approx \frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max}) + \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Wzór ten — w porównaniu z zależnością (51) dla układu (B) na rys. 16 — ilustruje w prosty sposób istotę trochę większego niebezpieczeństwa w układzie (A) dla izolacji oddalonej od odgromnika. Występuje mianowicie składnik napięciowy $\frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max})$, którego nie ma dla układu (B). Składnik ten można rozumieć jako spadek napięciowy na indukcyjności L_l od prądu dopływającego poprzez indukcyjność L_s — w myśl najprostszej zależności (36) z rozdziału 6. Może on odgrywać poważną rolę zwłaszcza przy dużych wartościach $u_{x \text{ const}}$ oraz przy większej indukcyjności L_l , która w drugim składniku wyrażenia (57) występuje pod znakiem pierwiastka. Przy mniejszych wartościach $u_{x \text{ const}}$, mniejszej indukcyjności L_l oraz większej pojemności C_s składnik drugi we wzorze (57) wypada znacznie większy od pierwszego i wtedy różnica między układami (A) i (B) zaciera się.

Możliwości te ilustrujemy przykładem liczbowym. Przyjmujemy

$$\frac{u_{o \max}}{\left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}}} \approx 1 \dots 10 \mu\text{s} \quad (\text{większe wartości raczej przy większej pojemności } C_s),$$

$$\frac{u_{x \text{ const}}}{u_{o \max}} \approx 2 \dots 10,$$

$$L_s \approx 500 \mu\text{H}, \quad C_s \approx 10^{-4} \dots 1 \mu\text{F}.$$

$$\text{Obliczamy przy } L_l \approx \quad 5 \quad 50 \quad \mu\text{H}$$

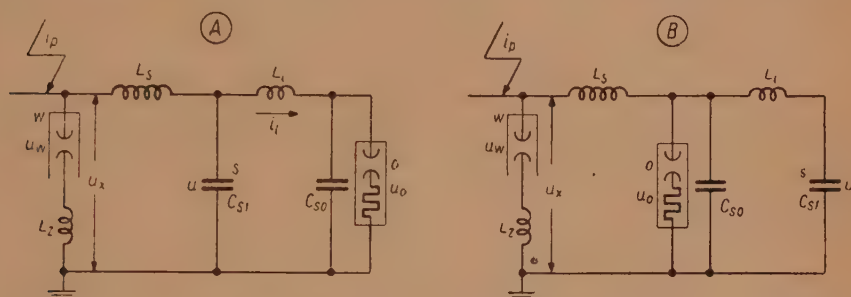
$$\frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max}) \approx 0,01 \dots 0,09 \quad 0,1 \dots 0,9 \cdot u_{o \max}$$

$$\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}} \approx 0,02 \dots 0,2 \quad 0,07 \dots 0,7 \cdot u_{o \max}.$$

Łagodniejsze spiętrzenie przepięciowe oscylacyjne otrzymuje się w układach przedstawionych na rys. 18 dzięki *korzystniejszemu rozmieszczeniu pojemności stacyjnej*.

$$C_s = C_{so} + C_{s1}.$$

Tylko mała pojemność częściowa C_{s1} jest odgrodzona od odgromnika zaworowego indukcyjnością L_l , a znaczna pojemność C_{so} występuje w pobliżu odgromnika. W układzie (A) odgromnik zaworowy jest ustawiony dalej od wejścia linii napowietrznej, w układzie (B) bliżej wejścia linii,



Rys. 18. Przypadki korzystnego rozmieszczenia pojemności stacyjnych $C_{so} \gg C_{s1}$ w układach ochronnych z odgromnikami zaworowymi o , dławikami szeregowymi L_s oraz odgromnikami w ; (A) — odgromniki o za izolacją s ; (B) — odgromniki o przed izolacją s .

podobnie jak w układach (A) i (B) na rys. 16. Dla przypadków przedstawionych na rys. 18 można zastosować częściowo wyniki poprzednich rozważań.

Rozwiązanie według wzorów (50), (51) można przyjąć dla układu (B) na rys. 18 zastępując tylko pojemność C_s przez C_{s1} :

$$u_{i \max} \approx \sqrt{L_l C_{s1}} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} \quad (58)$$

Dokładniejsze sformułowania dla tego układu, wzorowane na zależnościach (60), są niezbyt potrzebne, gdyż skupienie dużej pojemności C_{so} koło odgromnika zaworowego ogranicza różnicę między napięciami $u_{o \max}$, u_{pocz} .

Ujęcie matematyczne dla układu (A) z rys. 18 musi trochę odbiec od wzorów (53) ... (57). Nie tylko wypada zastąpić w równaniu różniczkowym (53) pojemność C_s przez C_{s1} , lecz również znajduje się inne warunki początkowe. Mianowicie zakładając znowu stałą wartość $u_{x \text{ const}}$ wyprawdza się przy $C_{so} \gg C_{s1}$, $L_s \gg L_l$

$$u_{pocz} \approx u_{o \max} + \frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max}).$$

Po zestawieniu tego warunku z równaniem różniczkowym otrzymuje się proste rozwiązanie

$$\left. \begin{aligned} \lambda &\approx 0, \\ u_{i \max} &\approx \frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max}) + \sqrt{L_l C_{s1}} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}} \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Jest to sformułowanie podobne do wzoru (57), jednakże o charakterze bardziej dokładnym.

10. SZKODLIWE SPADKI INDUKCYJNE W UKŁADACH Z DŁAWIKAMI OCHRONNYMI. ZESTAWIENIE RÓŻNYCH PRZYPADKÓW

Pozostaje jeszcze podstawić w sformułowaniach ogólnych na spadki napięciowe indukcyjne w układach z dławikami szeregowymi wyniki rozważań z rozdziału 5 nad stromością wzrostu przepięcia. Należy skojarzyć właściwie warianty z rozdziału 5 i przypadki z rozdziału 9 oraz oświetlić prawdopodobne przebiegi spiętrzania przepięć na izolacji.

Rozpatrujemy najpierw przypadki bez wielkiego wpływu pojemności stacyjnej C_s na przebiegi napięć u , u_o przed zapłonem odgromnika zaworowego. Mamy na myśli głównie układy bez kondensatorów. Stała czasowa $\sqrt{L_s C_s}$ jest mała w porównaniu z czołem udaru u_x występującego po stronie liniowej dławika. Przebiegi napięć u , u_o są zbliżone do u_x .

Jeżeli głównym składnikiem przepięcia u_x jest spadek indukcyjny na L_z (zwłaszcza przy niższych napięciach znamionowych), to można przyjąć zależność (32) dla wariantu drugiego z rozdziału 5 i napisać dla układu (A) z rys. 16 na podstawie wzoru (57)

$$u_{i \max} \approx \frac{L_l}{L_s} \left[L_z \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} - u_{o \max} \right] + \sqrt{L_l C_s} L_z \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\max}, \quad (60)$$

a dla układu (B) na rys. 16 na podstawie wzoru (51)

$$u_{i \max} \approx \sqrt{L_l C_s} L_z \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\max} \quad (61)$$

Dla układów zaś (A) i (B) z rys. 18 można przyjąć opierając się na zależnościach (59) i (58) wzory podobne do (60) i (61), tylko z zamianą C_s na C_{s1} .

Jeżeli natomiast głównym składnikiem przepięcia u_x jest napięcie zapłonowe odgromnika wydmuchowego u_w , to można przyjąć zależność (34) dla wariantu czwartego z rozdziału 5 i napisać dla układu (A) z rys. 16 na podstawie wzoru (57)

$$u_{i \max} \approx \frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max}) + \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max}, \quad (62)$$

a dla układu (B) z rys. 16 na podstawie wzoru (51)

$$u_{i \max} \approx \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max} \quad (63)$$

Dla układów (A) i (B) na rys. 18 można zastosować opierając się na zależnościach (59) i (58) wzory (62) i (63) zastępując tylko C_s przez C_{s1} .

Rozpatrujemy dalej *przypadki silnego wpływu pojemności stacyjnej* C_s na napięcia u , u_o przed zapłonem odgromnika zaworowego. Chodzi teraz raczej o *układy z kondensatorami*, o stałej czasowej $\sqrt{L_s C_s}$ dużej w zestawieniu z czołem udaru u_x .

Jeżeli w gałęzi odgromnika wydmuchowego główną rolę odgrywa indukcyjność L_z , to wobec krótkotrwałego charakteru przepięcia $L_z \frac{di_p}{dt}$ w porównaniu z napięciami u , u_o składnik pierwszy we wzorze (57) dla układu (A) na rys. 16, napisany w postaci

$$\frac{L_l}{L_s} \left[L_z \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} - u_{o \max} \right],$$

byłby bardzo przesadzony. W przypadku tym lepiej jest pominąć ten składnik i przyjąć na podstawie zależności (31) dla wariantu pierwszego z rozdziału 5 wzór uproszczony

$$u_{i \max} \approx \sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \frac{L_z}{L_s + L_z} i_{p \max} \quad (64)$$

Ten sam wzór wynika z zależności (51) dla układu (B) na rys. 16. Dla układów z rys. 18 wyprowadza się podobnie na podstawie zależności (58) i (59)

$$u_{i \max} \approx \sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \frac{L_z}{L_s + L_z} i_{p \max} \quad (65)$$

Jeżeli natomiast w gałęzi odgromnika wydmuchowego główną rolę odgrywa *napięcie zapłonowe* u_w , to można przyjąć zależność (33) dla wariantu trzeciego z rozdziału 5 i napisać dla układu (A) z rys. 16 opierając się na wzorze (57)

$$u_{i \max} \approx \frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max}) + \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}, \quad (66)$$

(przeważnie z przewagą drugiego składnika), a dla układu (B) z rys. 16 na podstawie wzoru (51)

$$u_{i \max} \approx \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2} \quad (67)$$

Ten właśnie przypadek zilustrowano na rys. 17; przebieg napięcia $u_w = u_x$ jest prostokątny; krzywa (u) przedstawia przebiegi mniej więcej jednakowe napięć u , u_o bez zapłonu odgromnika zaworowego, z okresem oscylacji około $2\pi\sqrt{L_s C_s}$; w chwili 0_2 zapłon odgromnika zaworowego daje początek oscylacjom napięcia u omówionym w rozdziale 9. Podobnie wprowadza się dla układu (A) z rys. 18 na podstawie wzoru (59)

$$u_{i\max} \approx \frac{L_l}{L_s} (u_{w\max} - u_{o\max}) + \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2u_{w\max} u_{o\max} - u_{o\max}^2} \quad (68)$$

i dla układu (B) z rys. 18 na podstawie wzoru (58)

$$u_{i\max} \approx \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2u_{w\max} u_{o\max} - u_{o\max}^2} \quad (69)$$

Możliwości wynikające z tych sformułowań matematycznych ilustrujemy przykładami liczbowymi. Przyjmujemy

$$i_{p\max} \approx 150 \text{ kA}, \quad \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} \approx 50 \text{ kA}/\mu\text{s}, \quad \left(\frac{d^2i_p}{dt^2} \right)_{\max} \approx 30 \text{ kA}/\mu\text{s}^2,$$

$$u_{o\max} \approx 50 \dots 500 \text{ kV} \text{ (większe wartości przy wyższych napięciach znamionowych),}$$

$$u_{w\max} \approx 1,5 u_{o\max}, \quad \frac{u_{w\max}}{\left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max}} \approx 1,5 \mu\text{s},$$

$$L_s \approx 500 \mu\text{H},$$

$$L_z \approx 5 \dots 50 \mu\text{H} \text{ (większe wartości przy wyższych napięciach znamionowych),}$$

dla układów bez kondensatorów

$$C_s \approx 10^{-3} \dots 10^{-2} \mu\text{F}, \quad C_{s1} \approx 10^{-4} \dots 10^{-3} \mu\text{F},$$

a dla układów z kondensatorami

$$C_s \approx 10^{-1} \dots 1 \mu\text{F}, \quad \frac{C_{s1}}{C_s} \approx 10^{-4} \dots 10^{-2}.$$

Obliczamy przy $L_l \approx$

5 50 μH

a. dla układów bez kondensatorów

$$1. \frac{L_l}{L_s} \left[L_z \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} - u_{o\max} \right] \approx \quad 2 \dots 20 \quad 20 \dots 200 \text{ kV}$$

$$2. \sqrt{L_l C_s} L_z \frac{d^2i_p}{dt^2} \approx \quad 10 \dots 300 \quad 30 \dots 1000 \text{ kV}$$

$$3. \sqrt{L_l C_{s1}} L_z \frac{d^2i_p}{dt^2} \approx \quad 3 \dots 100 \quad 10 \dots 300 \text{ kV}$$

- | | | | |
|----|---|--------------|----------------|
| 4. | $\frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max})$ | 0,25 ... 2,5 | 2,5 ... 25 kV |
| 5. | $\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max}$ | 3,5 ... 100 | 10 ... 350 kV |
| 6. | $\sqrt{L_l C_{s1}} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max}$ | 1 ... 35 | 3,5 ... 100 kV |

b. dla układów z kondensatorami

- | | | | |
|-----|---|--------------|----------------|
| 7. | $\sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \frac{L_z}{L_s + L_z} i_{p \max} \approx$ | 3 ... 100 | 10 ... 300 kV |
| 8. | $\sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \frac{L_z}{L_s + L_z} i_{p \max} \approx$ | 0,03 ... 10 | 0,1 ... 30 kV |
| 9. | $\frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max}) \approx$ | 0,25 ... 2,5 | 2,5 ... 25 kV |
| 10. | $\sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}$ | 7 ... 70 | 25 ... 250 kV |
| 11. | $\sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2} \approx$ | 0,07 ... 7 | 0,25 ... 25 kV |

Największe wyniki takich obliczeń składowej oscylacyjnej 2, 3, 5, 6, 7, 10 nie wchodzi w rzeczywistości w rachubę (zwłaszcza przy niższych napięciach znamionowych), ponieważ składowa ta nie może przekroczyć według rozważań w rozdziale 7 wartości $u_{o \max}$.

Wzory (60) ... (69) mają charakter niezbyt ścisłych przybliżeń, raczej obostrzonych w porównaniu z rzeczywistością. Obliczenia spadków indukcyjnych na tej podstawie nie mają widoków dobrego zastąpienia prób laboratoryjnych modelowych również i dlatego, że zachodzi potrzeba badania układów bardziej złożonych. Przydatność sformułowań matematycznych w obecnej formie polega głównie na tym, że można wskazać znaczenie różnych czynników i drogi udoskonalenia ochrony odgromowej stacyjnej.

Skuteczność dławika szeregowego na wejściu linii napowietrznej wynika najwyraźniej z wszystkich wzorów (64) ... (69) dla układów z kondensatorami. W urządzeniach bez kondensatorów wzory (61) i (63) nie wskazują bezpośrednio na pożyteczną rolę dławika w układach typu (B), z odgromnikami zaworowymi bliżej wejścia linii; jednakże dławik przyczynia się w rzeczywistości do obniżania przepięcia u_{\max} , gdyż zmniejsza wartość $u_{o \max}$ dzięki bardzo dobremu ograniczeniu prądu wyładowczego w odgromniku zaworowym. Pożyteczny wpływ tego rodzaju występuje

również w innych przypadkach, obok korzystnego działania wyrażonego we wzorach (60), (62) i (64) ... (69).

Przykłady liczbowe wskazują, że zbyt wielka indukcyjność L_z w gałęzi odgromnika wydmuchowego może psuć skuteczność ochrony stacyjnej. Radykalne ograniczenie długości przewodów w tej gałęzi jest więc konieczne, zwłaszcza przy niższych napięciach znamionowych. Wiąże się to z wyborem właściwego rozmieszczenia urządzeń.

Z rozważań matematycznych wynikają wielkie korzyści układów zbliżonych do rys. 18, z jak największymi pojemnościami w pobliżu odgromników zaworowych, jak najmniejszymi w większych odległościach. Umieszczenie odgromników zaworowych w pobliżu transformatorów energetycznych o stosunkowo wielkich pojemnościach jest więc korzystne nie tylko z powodu dużego znaczenia ochrony transformatorów. W układach z kondensatorami, na przykład służącymi do ochrony maszyn wirujących, należy umieszczać kondensatory jak najbliżej odgromników zaworowych; można wtedy uzyskać bardzo mały czynnik $\sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}}$ we wzorach (65), (68) i (69).

Porównanie wzorów dla układów typu (A) i typu (B) z odgromnikami zaworowymi umieszczonymi dalej lub bliżej wejścia linii napowietrznej, wykazuje wyraźną wyższość układów typu (B) tylko w niektórych warunkach, przy wielkiej roli pierwszych składników we wzorach (60), (62) i (68). Zdarza się to raczej przy większych indukcyjnościach L_1 , przy większych nadwyżkach napięć $L_z \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max}$ lub $u_{w \max}$ nad $u_{o \max}$, przy mniejszych pojemnościach C_s w układach na rys. 16 lub C_{s1} w układach na rys. 18 z kondensatorami.

Katedra Wysokich Napięć i Przyrządów Rozdzielczych
Politechnika Gdańska

WYKAZ LITERATURY

- Berger K. Die Beanspruchung von Ueberspannungsableitern durch nahe Blitzeinschläge — Bulletin Ass. Suisse El., 1942, s. 272.
- Berger K., Giaro J. Vom Blitzeinschlag bedingter Spannungsverlauf an einer am Ende einer Freileitung angeschlossenen Kapazität — Bulletin Ass. Suisse El., 1944, s. 14.
- Siemer W. Richtlinien für den Einbau von Ueberspannungsableitern in Freileitungsnetzen — El. Zeitschrift, 1943, II, s. 601.
- Szpor S. Ochrona odgromowa — Państw. Wyd. Techniczne, Warszawa, t. 1, 1953 — t. II, 1955.
- Szpor S. Napięcia wywołujące iskry wtórne i porażenia w urządzeniach piorunochronowych — Archiwum Elektrotechniki, 1953, s. 276.
- Whitehead E. R. Development in lightning protection of stations — Transactions Am. Inst. El. Eng., 1944, s. 898.

С. ШПОР

ЗНАЧЕНИЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ИНДУКТИВНОСТЕЙ В СИСТЕМАХ
СТАНЦИОННОЙ ГРОЗОЗАЩИТЫ. ПРИНЦИПЫ СИСТЕМ С ДРОССЕЛЯМИ

Резюме

В главе первой припоминаются цели дополнительных грозозащитных средств, применяемых или предлагаемых для больших станций наряду с вентильными разрядниками:

1. Ограничение максимальной величины и крутизны нарастания разряжаемого тока в вентильном разряднике, а также — благодаря этому — уменьшение, остающегося напряжения на разряднике.

2. Ограничение скорости нарастания токов и напряжений в различных местах, во избежание опасных падений напряжения на последовательных индуктивностях проводов или обмоток внутри станций.

3. Ограничение крутизны нарастания перенапряжения согласно особым требованиям для вращающихся машин.

Как дополнительные средства чаще всего применяются заземленные тросы, прикрывающие подходы воздушных линий перед станциями. Другим решением является последовательное включение дросселей на входе каждой воздушной линии и добавочные трубчатые разрядники или искровые промежутки на линейной стороне дросселей, как это представлено на рис. 1. В. Способ этот особенно целесообразен для станций со средними напряжениями, для которых эффективное экранирование воздушных линий затруднительно и неэкономно.

Теоретические соображения в главах 2...10 касаются разного рода действия последовательных индуктивностей при различных условиях. Сперва анализируются преимущества даваемые последовательными индуктивностями на входе в устройство, затем исследованы нежелательные падения напряжения на индуктивностях внутри станции, наконец обсуждается содействие входных а также внутренних индуктивностей.

Исследования посвящены главным образом схемам защиты с последовательными дросселями, но некоторые главы относятся также к случаю экранированных подходов. Рассмотрены заземлители по обеим сторонами входной индуктивности — как отдельные (рис. 2 и 5) так и совместные (рис. 4, 7, 16 и 18); в схемах с последовательными дросселями предложено соединение заземлителей, как наиболее целесообразное решение. Исследованы станции как без конденсаторов, так и с конденсаторами.

Предположены строгие громовые условия: 150 кА, 50 кА мксек и посредственно рассчитанное значение: 30 кА/мксек². Форма вершины принята по большей части экспоненциальной. В рассуждениях выступают фронты с разными формами: вертикальные, косинусоидальные или с прямолинейным наклоном.

Напряжение в ветви трубчатого разрядника или искрового промежутка определяется упрощенным образом, пренебрегая меньшими составляющими. Итак, напр. сравнительно высокие напряжения на заземленном сопротивлении имеют большое значение, индуктивными же падениями напряжения и разрядными напряжениями — пренебрежено. Однако учитывается одна из этих двух составляющих, если соединение заземлений элиминирует заземленное сопротивление из рассматриваемой цепи. Если за основу расчёта принято разрядное

напряжение, то предполагается малое отношение максимальной величины к наибольшей крутизне нарастания, около 1,5 мксек.

Остающиеся на вентильных разрядниках напряжения по большей части считаются в математических соображениях постоянными, независимыми от импульсных токов. Срезанные импульсы представлены как состоящие из прямолинейных отрезков.

Теоретические соображения с радикально упрощёнными и отчасти искусственными подробностями не могут конечно заместить экспериментальных исследований на более полных системах, на станциях и на лабораторных моделях. Всё же подобные математические исследования полезны, ибо они изъясняют самые важные защитные факторы и указывают на некоторые принципы усовершенствований.

Эффективность последовательной индуктивности L в ограничении максимального значения и наибольшей крутизны импульсного тока i в вентильном разряднике выражается в случае отдельных заземлений формулами

$$i_{\max} = i_{p \max} \frac{R_z}{R_z + R_s} \varphi, \quad (8)$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{\max} = \frac{i_{p \max} R_z}{L_s}, \quad (6)$$

где

$i_{p \max}$ — максимальное значение громового тока,

R_z — сопротивление заземления со стороны линии,

R_s — сопротивление со стороны станции с вентильными разрядниками включительно,

φ — коэффициент, зависящий от соотношения постоянной времени $T = \frac{L_s}{R_z + R_s}$ к постоянной времени T_w показательного громового хвоста, представленный на рис. 3.

В случае совместных заземлителей соображения приводят нас к зависимости

$$i_{\max} = i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z}, \quad (16)$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{\max} = \left(\frac{di_p^w}{dt} \right)_{\max} \frac{L_z}{L_s + L_z}, \quad (18)$$

где рядом с прежними обозначениями

L_z — индуктивность ветви трубчатого разрядника (на линейной стороне дросселя L_s).

Из этих формул следует отчётливое превосходство совместных заземлителей — в системе с последовательными дросселями.

Совместное действие последовательной индуктивности L_s с ёмкостью станции C_s при ограничении крутизны нарастания перенапряжения u на станции — в случае отдельных заземлителей — даёт радикально упрощённый результат (в некоторых довольно вероятных условиях)

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = \frac{\sqrt{2R_z i_{p \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{\sqrt{L_s C_s}}, \quad (25)$$

где

$u_{o \max}$ — остающееся напряжение на вентильном разряднике.

Формула эта соответственна при сравнительно больших постоянных времени $\sqrt{L_s C_{ss}}$ в сравнении с фронтом грозового тока, что случается главным образом на станциях с конденсаторами. В противоположном случае можно применять простейшее выражение

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = R_s \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max}$$

как несколько преувеличенный результат.

В случае совместных заземлителей мы различаем четыре варианта. Если главную роль в ветви трубчатого разрядника играет индуктивность L_z и если постоянная времени $\sqrt{(L_s + L_z) C_s}$ сравнительно большая, то можно применять приближённую формулу

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{1}{C_s}, \quad (31)$$

если же значение $\sqrt{(L_s + L_z) C_s}$ сравнительно мало (на станции с малыми ёмкостями), то можно применять простое выражение

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = L_z \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\max} \quad (32)$$

для несколько более строгих расчётов.

Если же разрядное напряжение $u_{w \max}$ трубчатого разрядника является главной составляющей со стороны линии, то нами предлагается формула схожая с формулой (25):

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = \frac{\sqrt{2 u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (33)$$

при сравнительно больших постоянных времени $\sqrt{L_s C_s}$, а при малых значениях $\sqrt{L_s C_s}$ можно принять простую зависимость

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max} \quad (34)$$

Вредные падения напряжения на внутренних станционных индуктивностях L_l можно выразить в зависимости от протекающего там тока i_l :

$$u_{l \max} = L_l \left(\frac{di_l}{dt} \right)_{\max}, \quad (36)$$

в особенности в случае, когда вентильный разрядник поставлен дальше от входа линии, чем охраняемая изоляция. Тогда импульсный ток вентильного разрядника составляет нередко значительную часть тока i_l . Однако и токи соответствующие станционным ёмкостям также могут играть серьёзную роль. Эти ёмкостные токи играют решающую роль в случае, когда вентильный разряд-

ник поставлен ближе входа линии чем изоляция, представляющая ёмкость C_s . Мы можем тогда написать для колебательного падения напряжения

$$u_{i \max} = \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_o}{dt} \right)_{\max} \quad (45)$$

где

u_o — напряжение между зажимами вентильного разрядника.

Формула эта является соответственной только при малых по сравнению с длиной фронта u_o постоянных времени $\sqrt{L_l C_s}$.

В этом случае рассматривается интерференция колебаний образованных в начале фронта перенапряжений, а также в момент разряда вентильного разрядника, предполагая несколько искусственные условия. Указана возможность удвоения значения рассчитанного по формуле (45) в случае особенно невыгодной интерференции. Подобные исследования систем с трубчатыми разрядниками вместо вентильных разрядников приводят нас к заключению, что колебательные падения напряжения вызывают тогда менее сильное повышение перенапряжений, но что действие срезанных импульсов на трансформаторы может однако быть сильно заострено, как это представлено на рис. 15.

Более подробные исследования падения напряжений $u_{i \max}$ на внутренних индуктивностях L_l посвящены системам с последовательными дросселями, с вентильными разрядниками на станционной стороне и с трубчатыми разрядниками или с искровыми промежутками на линейной стороне дросселей. Учитывается крутизна возрастания $\left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{порз}}$ на станционной стороне непосредственно перед разрядом вентильного разрядника. Сперва рассматриваются две более простые системы — с невыгодно сосредоточенной ёмкостью C_s , далеко от вентильного разрядника, как это представлено на рис. 16. Если этот разрядник находится ближе входа линии чем ёмкость C_s , то при упрощающих предположениях получается формула

$$u_{i \max} = \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{порз}} \quad (51)$$

а если вентильный разрядник помещён дальше входа линии, то может быть написана более сложная зависимость

$$u_{i \max} = \frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max}) + \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{порз}} \quad (52)$$

где

$u_{x \text{ const}}$ — напряжение на линейной стороне дросселя, определяемое либо как индуктивное падение напряжения в ветви трубчатого разрядника, либо как разрядное напряжение этого разрядника, принимаемое в качестве сравнительно постоянного значения во время рассматриваемого колебания.

Колебательные составляющие $\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{порз}}$ выступают подобным образом в обоих случаях. Составляющая $\frac{L_l}{L_s} (u_{x \text{ const}} - u_{o \max})$ выражает некоторую неудовлетворительность системы с вентильными разрядниками помещёнными дальше чем вход линии.

Затем рассматривается более выгодное расположение стационарных ёмкостей, со значительной частью C_{s0} вблизи вентильного разрядника и с меньшей частью C_{s1} отделенной от этого разрядника индуктивностью L_l , как это представлено на рис. 18. Предлагаются для двух случаев формулы сходные с формулами (51) и (57) — с частичной ёмкостью C_{s1} вместо C_s .

Наконец представлены в этих формулах различные выражения замещающие $u_{w \text{ const}}$ а также $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{роз}}$ основываясь на предшествующих рассуждениях относительно содействия L_s и C_s в различных вариантах. При сравнительно малых ёмкостях C_s (без конденсаторов) выведены следующие формулы для двух случаев А и В, представленных на рис. 16:

1. Если перевес имеет составляющая на L_s ,

$$\text{А. } u_{i \text{ max}} = \frac{L_l}{L_s} \left[L_s \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\text{max}} - u_{o \text{ max}} \right] + \sqrt{L_l C_s} L_s \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\text{max}}, \quad (60)$$

$$\text{В. } u_{i \text{ max}} = \sqrt{L_l C_s} L_s \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\text{max}}. \quad (61)$$

2. Если же важнейшей является составляющая u_w ,

$$\text{А. } u_{i \text{ max}} = \frac{L_l}{L_s} (u_{w \text{ max}} - u_{o \text{ max}}) + \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\text{max}}, \quad (62)$$

$$\text{В. } u_{i \text{ max}} = \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\text{max}}. \quad (63)$$

Для двух представленных на рис. 18 случаев могут быть написаны подобные формулы с ёмкостью C_{s1} вместо C_s .

При сравнительно больших ёмкостях (станции с конденсаторами) для двух случаев А и В представленных на рис. 16, выводятся следующие формулы:

1. Принимая во внимание составляющую на L_s ,

$$\text{А, В. } u_{i \text{ max}} = \sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \frac{L_s}{L_s + L_l} i_{p \text{ max}}. \quad (64)$$

2. Принимая во внимание составляющую u_w ,

$$\text{А. } u_{i \text{ max}} = \frac{L_l}{L_s} (u_{w \text{ max}} - u_{o \text{ max}}) + \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2u_{w \text{ max}} u_{o \text{ max}} - u_{o \text{ max}}^2}, \quad (66)$$

$$\text{В. } u_{i \text{ max}} = \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2u_{w \text{ max}} u_{o \text{ max}} - u_{o \text{ max}}^2}. \quad (67)$$

Для представленных на рис. 18 случаев математические рассуждения ведут к формулам:

1. Если перевес имеет составляющая на L_s ,

$$\text{А, В. } u_{i \text{ max}} = \sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \frac{L_s}{L_s + L_l} i_{p \text{ max}}, \quad (65)$$

2. Если главную роль играет составляющая u_w ,

$$\text{A. } u_{i \max} = \frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max}) + \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2} \quad (68)$$

$$\text{B. } u_{i \max} = \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2} \quad (69)$$

Формулы (60)...(69) освещают ряд принципов и возможностей защиты станции:

1. преимущества малого значения отношения L_l/L_s , т. е. эффективность входной индуктивности L_s против вредных последствий внутренних индуктивностей L_l , во многих случаях,

2. возможности хорошей защиты при применении последовательных дросселей L_s около 500 μH , если применяется интерконнекция заземлений,

3. принцип возможно более радикального ограничения индуктивности L_l ветви трубчатого разрядника с линейной стороны, в особенности при низких номинальных напряжениях,

4. принцип умеренного значения отношения $u_{w \max}/u_{o \max}$ (трубчатый разрядник со стороны линии / вентильный разрядник со стороны станции) напр. около 1,5.

5. роль расположения вентильного разрядника ближе или дальше входа линии,

6. преимущества малого значения отношения C_{s1}/C_s (эффективность полной станционной ёмкости C_s против вредных последствий отодвинутой частичной ёмкости) C_{s1} в некоторых случаях,

7. отчётливое улучшение вследствие установки большой ёмкости C_{so} (конденсаторы) вблизи вентильного разрядника или вследствие расположения вентильного разрядника вблизи сравнительно большой ёмкости.

В случае если формулы (61) и (63) не указывают непосредственно на влияние индуктивности L_s , то её эффективность состоит всётаки в хорошем ограничении остающегося напряжения $u_{o \max}$.

S. SZPOR

EFFECTS OF SERIES INDUCTANCES IN STATION LIGHTNING PROTECTION SYSTEMS. — PRINCIPLES OF COIL UTILIZATION

Summary

Chapter 1 summarizes the purposes of the additional lightning-protection means which are used or proposed for important stations beside the lightning arresters. These purposes are:

1. to limit the crest value and the rate of rise of the discharge current flowing through the valve — type arrester and to reduce consequently the voltage drop across the arrester,

2. to limit the current and voltage rates of rise at different points, in order to avoid dangerous voltage drops across series inductances of conductors or windings in the station,

3. to limit the voltage rate of rise according to special requirements for rotating machines.

The most frequently used additional protection means are ground wires over a zone adjacent to the station. Another solution consists in connecting series coils at the entrance of each overhead line and adding expulsion type arresters or air gaps on the line side of the coils, as represented in Fig. 1, B. This system is particularly suitable for medium-voltage stations, where effective screening of overhead lines is difficult and uneconomical.

Theoretical studies following in chapters 2... 10 deal with different effects of series inductances under various circumstances. First, the advantages of the series entrance inductances are analysed, then undesired voltage drops across the internal station inductances are considered, at last joint effects of the entrance coils and of the internal inductances are discussed. The investigation is concerned chiefly with the protection systems including series coils, but some chapters relate also to the case of ground-wire screening. The analysis takes into account alternately separate grounds on the two sides of the entrance inductance (Fig. 2 and 5), which corresponds to the ground-wire case, and interconnected grounds (Fig. 4, 7, 16 and 18), which is proposed for the series coil as the most effective solution. Stations without condensers as well as with condensers are considered.

Severe lightning-current data are assumed: 150 kA, 50 kA/ μ s and an indirectly estimated value 30 kA/ μ s². Wave tails are adopted for the most part of exponential shape. Different wave fronts are taken: vertical, cosinusoidal or rectilinear. The voltage across the expulsion-type-arrester or air-gap branch is determined in a simplified manner, smaller components being neglected. For instance, if relatively high voltages across the resistance to ground play an important part, then the inductive voltage drops and the flashover voltage are disregarded. But one of the latter two components is taken into account, if interconnection of the two grounds eliminates the resistance to ground from the circuit under examination. When the flashover voltage is adopted as a basis of calculations, then a relatively small ratio of the crest value to the maximum rate of rise, about 1.5 μ s, is assumed. Discharge voltages across valve-type arresters are considered for the most part in the mathematical analysis to be constant irrespectively of the discharge currents. Chopped waves are represented as constituted of rectilinear parts.

The theoretical investigations, based on radically simplified and partly artificial details, cannot replace experimental research work on more complete schemes, on stations and on laboratory models. Nevertheless, such mathematical analysis is useful in so far as it explains the most important factors of the protection and indicates some principles of improvement.

The efficacy of the series inductance L_s in limiting the crest value and the maximum rate of rise of the current i flowing through the arrester corresponds in the case of separate grounds to formulae

$$i_{\max} = i_{p \max} \frac{R_s}{R_s + R_g} \varphi, \quad (8)$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{\max} = \frac{i_{p \max} R_s}{L_s}, \quad (6)$$

where

$i_{p \max}$ — crest value of the lightning current,
 R_g — line-side ground resistance,

R_s — station-side resistance including the lightning arrester,

φ — factor depending on the ratio of the time constant $T = \frac{L_s}{R_s + R_s}$ to the

time constant T_w of the exponential lightning tail represented in Fig. 3.

In the case of interconnected grounds the analysis leads to equations

$$i_{\max} = i_{p \max} \frac{L_s}{L_s + L_z}, \quad (16)$$

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{\max} = \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} \frac{L_s}{L_s + L_z}, \quad (18)$$

where besides the former notation

L_z — inductance of the expulsion-type arrester branch (on the line-side of L_s). A distinct superiority of the interconnection — in the system with series coils — results from these formulae.

The cooperation of the series inductance L_s with the station capacity C_s in limiting the rate of rise of the station voltage u — in the case of separate grounds — gives as a radically simplified result (under some probable circumstances)

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = \frac{\sqrt{2R_z i_{p \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}}{\sqrt{L_s C_s}}, \quad (25)$$

where

$u_{o \max}$ — discharge voltage across the valve-type arrester.

This formula is suitable with time constants $\sqrt{L_s C_s}$ relatively great as compared with the lightning-current front, which happens mainly in stations with condensers. Otherwise, the simplest expression

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = R_s \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} \quad (27)$$

may be used as a slightly exaggerated result.

In the case of interconnected grounds four alternatives are distinguished. If inductance L_z plays the most important part in the expulsion-type-arrester branch and if the time constant $\sqrt{(L_s + L_z) C_s}$ is relatively great, then one may use approximate formula

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = i_{p \max} \frac{L_z}{L_s + L_z} \frac{1}{C_s}, \quad (31)$$

but if the value of $\sqrt{(L_s + L_z) C_s}$ is relatively low (in a station with small capacities), then the simple expression

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{\max} = L_z \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\max} \quad (32)$$

may be adopted for slightly too severe calculations. If, on the contrary, the spark-over voltage $u_{w \max}$ of the expulsion-type arrester is the most important voltage component on the line side, then a formula similar to (25) is proposed:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max} = \frac{\sqrt{2u_{w\max}u_{o\max} - u_{o\max}^2}}{\sqrt{L_s C_s}} \quad (33)$$

at relatively high values of $\sqrt{L_s C_s}$, while for small time constants $\sqrt{L_s C_s}$ the simplest equation

$$\left(\frac{du_s}{dt}\right)_{\max} = \left(\frac{du_w}{dt}\right)_{\max} \quad (34)$$

may be taken.

Obnoxious voltage drops across the internal station inductances L_l may be expressed in terms of the current i_l flowing there:

$$u_{i\max} = L_l \left(\frac{di_l}{dt}\right)_{\max}, \quad (36)$$

especially in the case, when the lightning arrester is situated further from the line entrance than the insulation to be protected. Then the discharge current of the lightning arrester constitutes frequently a great part of i_l . But currents flowing through station capacities may also play an important part. These currents decide in the case, when the lightning arrester is situated nearer to the line entrance than the insulation, which represents a capacity C_s . Then one may write for the oscillatory voltage drop

$$u_{i\max} = \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_o}{dt}\right)_{\max}, \quad (45)$$

where

u_o — voltage across the valve-type arrester.

This formula is suitable only for small time constants $\sqrt{L_l C}$ as compared with the front duration of u_o .

Interference of oscillations produced at the beginning of the voltage front and at the moment of the arrester sparkover is considered in this case under somewhat artificial circumstances. Doubling of the value determined after equation (45) is shown to be possible as a result of a particularly disadvantageous interference. Similar analysis of schemes containing expulsion-type arresters or air gaps instead of valve-type arresters points out that oscillatory voltage drops produce then less overvoltage cumulation, but chopped wave effects on transformers may be strongly aggravated, as shown in Fig. 15.

More detailed studies on the voltage drops $u_{i\max}$ across the internal inductances L_l are devoted to the protection schemes containing series coils, valve-type arresters on the station side, and expulsion-type arresters or air gaps on the line side of the

coils. The rate of rise $\left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}$ on the station side just before the sparkover of the valve-type arrester is taken into account. First, two simpler cases are considered — with an unfavourable concentration of the capacity C_s far from the valve-type arrester, as represented in Fig. 16. If this arrester is situated nearer to the line entrance than the capacity C_s , then one finds under some simplified circumstances formula

$$u_{i\max} = \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt}\right)_{\text{pocz}}, \quad (51)$$

while if the valve-type arrester is further from the line, then a more complicated expression may be written

$$u_{i\max} = \frac{L_l}{L_s} (u_{x\text{const}} - u_{s\max}) + \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}}, \quad (57)$$

where

$u_{x\text{const}}$ — voltage on the line side of the series coil, either inductive drop across the branch of the expulsion-type arrester or sparkover voltage of this arrester — treated as a relatively constant value during the oscillation under examination.

Oscillatory components $\sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}}$ arise similarly in both cases. Component $\frac{L_l}{L_s} (u_{x\text{const}} - u_{s\max})$ expresses certain inferiority of the scheme with valve-type arresters placed further from the line entrance.

Further, a more advantageous repartition of the station capacities is considered, with a great part C_{s0} close to the valve-type arrester and a smaller part C_{s1} separated by L_l from this arrester, as shown in Fig. 18. Formulae similar to (51) and (57) are proposed for the two cases, with the partial capacity C instead of C_s .

At last different expressions are substituted in these equations for $u_{x\text{const}}$ and for $\left(\frac{du}{dt} \right)_{\text{pocz}}$ on the basis of the previous analysis of the cooperation of L_s and C_s in various alternatives. With relatively small capacities C_s (without condensers) one finds following formulae for the two cases A and B, represented in Fig. 16:

1. if the L_s component predominates,

$$\text{A) } u_{i\max} = \frac{L_l}{L_s} \left[L_s \left(\frac{di_p}{dt} \right)_{\max} - u_{s\max} \right] + \sqrt{L_l C_s} L_s \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\max}, \quad (60)$$

$$\text{B) } u_{i\max} = \sqrt{L_l C_s} L_s \left(\frac{d^2 i_p}{dt^2} \right)_{\max}, \quad (61)$$

2. and if the u_w component is the most important,

$$\text{A) } u_{i\max} = \frac{L_l}{L_s} (u_{w\max} - u_{s\max}) + \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max}, \quad (62)$$

$$\text{B) } u_{i\max} = \sqrt{L_l C_s} \left(\frac{du_w}{dt} \right)_{\max} \quad (63)$$

For the two cases represented in Fig. 18 similar formulae may be written, with C_{s1} instead of C_s .

With relatively great capacities C_s (stations with condensers) one finds for the cases represented in fig. 16:

1. taking into account the L_s component

$$\text{A, B) } u_{i\max} = \sqrt{\frac{L_l}{C_s} \frac{L_s}{L_s + L_s}} i_{p\max}, \quad (64)$$

2. taking into account the u_w component

$$A) \quad u_{i \max} = \frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max}) + \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2 u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}, \quad (66)$$

$$B) \quad u_{i \max} = \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{2 u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}. \quad (67)$$

For the cases represented in Fig. 18 the mathematical study leads to formulae:

1. if the L_s component is the most important,

$$A, B) \quad u_{i \max} = \sqrt{\frac{L_l}{C_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s} \frac{L_s}{L_s + L_s} i_{p \max}} \quad (65)$$

2. and if the u_w component predominates,

$$A) \quad u_{i \max} = \frac{L_l}{L_s} (u_{w \max} - u_{o \max}) + \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2 u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}, \quad (68)$$

$$B) \quad u_{i \max} = \sqrt{\frac{L_l}{L_s}} \sqrt{\frac{C_{s1}}{C_s}} \sqrt{2 u_{w \max} u_{o \max} - u_{o \max}^2}. \quad (69)$$

Formulae (60) ... (69) point out some principles and possibilities of the station protection:

1. advantages of a small ratio L_l/L_s (efficacy of the entrance inductance L_s versus the internal inductances L_l) in many cases,
2. possibilities of good protection with series coils L_s of about 500 μH , if ground interconnection is adopted,
3. principle of most radical limiting the inductance L_s of the line-side expulsion-type arrester branch, especially in lower voltage classes,
4. principle of moderate ratio $u_{w \max}/u_{o \max}$ (line-side expulsion-type arrester/station-side valve-type arrester), say about 1,5,
5. effects of the location of the valve-type arresters nearer or further from the line entrance,
6. advantages of a small ratio C_{s1}/C_s (efficacy of the total station capacity C_s versus the remote partial capacity C_{s1}) in some cases,
7. essential improvement by locating great capacities C_{s0} (condensers) close to the valve-type lightning arresters or locating lightning arresters near relatively great capacities C_{s0} .

However, in cases, when formulae (61) and (63) do not directly show the influence of inductance L_s , its efficacy consists in a good limitation of the discharge voltage $u_{o \max}$ across the valve type arrester.

621.3.011.4 : 621.3.015

W. PASZEK

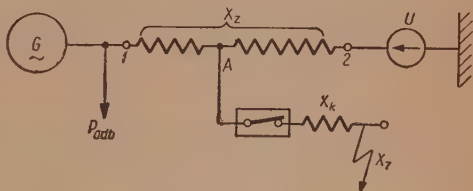
Wpływ forsowania wzbudzenia na pracę równoległą generatorów synchronicznych

Rękopis dostarczono 22. 2. 1955

Po objaśnieniu przebiegów wyrównawczych zachodzących w obwodach stojana i wirnika generatora w czasie zwarciovych obniżek napięcia przy jednoczesnym forsowaniu wzbudzenia analizuje się wpływ forsowania na równowagę statyczną (stanu ustalonego) pracy równoległej i równowagę dynamiczną (stanu nieustalonego). Z przeprowadzonych rozważań wynika celowość podwyższenia współczynnika forsowania w czasie pierwszego półokresu kołysania generatora dla zwiększenia wpływu forsowania wzbudzenia na równowagę dynamiczną generatora pracującego równolegle z systemem.

1. WSTĘP

Najważniejszym, pod względem praktycznym, przypadkiem pracy równoległej generatorów jest praca generatora synchronicznego na sieć sztywną poprzez reaktancję przesyłową X_z (rys. 1). W przypadku współpracy skupionej grupy generatorów silnie związanych pracujących na wspomnianą sieć sztywną, można całą grupę zastąpić jednym generatorem.



Rys. 1. Układ generatora pracującego na sieć sztywną poprzez reaktancję przesyłową X_z .

Drugim ważnym przypadkiem pracy równoległej jest współpraca dwóch generatorów poprzez reaktancję przesyłową. Przypadek ten można często sprowadzić matematycznie do podstawowego przypadku współpracy z siecią sztywną. Przy pominięciu odbioru P_{adb} na szynach elektrowni moc przesyłowa wyraża się wzorem.

$$P = \frac{E_d U_0}{X_z + X_d} \sin \vartheta + \frac{U_0^2}{2} \left(\frac{1}{X_q + X_z} - \frac{1}{X_d + X_z} \right) \sin 2\vartheta \quad (1)$$

w którym

X_d — reaktancja synchroniczna podłużna,

X_q — reaktancja synchroniczna poprzeczna,

X_z — reaktancja przesyłowa,

U_0 — napięcie sieci sztywnej,

ϑ — kąt mocy między wektorem napięcia sieci i napięcia wewnętrznego E_d .

Wpływ reaktancji przesyłowej X_z zmniejsza różnicę między $(X_q + X_z)$ i $(X_d + X_z)$, wskutek czego tak maleje moc asymetrii magnetycznej (moc reaktywna) generatora, że praktycznie moc przesyłową można wyrazić tylko pierwszym składnikiem równania (1). Jeżeli generator pracuje przy stałym prądzie wzbudzenia, to powiększeniu mocy przesyłowej towarzyszy powiększenie kąta mocy ϑ , to jest kąta przesunięcia między napięciem wewnętrznym generatora E_d i napięciem sieci sztywnej U_0 . Powiększenie to występuje aż do osiągnięcia statycznej mocy granicznej $P_{g0} \approx \frac{E_d U_0}{X_d + X_z}$ przy statycznym kącie granicznym $\vartheta_{g0} \approx 90^\circ$. Utrzymanie pracy równoległej generatora zależy głównie od mocy synchronizującej

$$P_s = \frac{\partial P}{\partial \vartheta} = \frac{E_d U_0}{X_d + X_z} \cos \vartheta + U_0^2 \left(\frac{1}{X_q + X_z} - \frac{1}{X_d + X_z} \right) \cos 2\vartheta, \quad (2)$$

która musi być większa od zera. Przy pominięciu mocy reaktywnej, moc synchronizująca maleje do zera w miarę wzrostu kąta mocy do $\vartheta_{g0} \approx 90^\circ$.

Wskutek zwarciovych obniżek napięcia sieci, na przykład przy zwarciu symetrycznym (przy zwarciu niesymetrycznym rozważania dotyczą zgodnej składowej symetrycznej napięcia), przez reaktancję X_k w punkcie A (rys. 1) maleje zastępcze napięcie sieci do wartości U_1

$$U_1 = U_0 \frac{1}{1 + \frac{X_z}{X_k}(1-a)} = \frac{U_0}{c}, \quad (3)$$

przy jednoczesnym zmniejszeniu reaktancji przesyłowej do wartości

$$X_{z1} = X_z \frac{a(c-1)+1}{c},$$

¹ Tutaj i w dalszym ciągu pracy reaktancje, prądy, napięcia i moce generatora wyrażone są w jednostkach względnych z tym, iż jako wartości odniesienia przyjęto znamionowe wartości prądu napięcia i mocy pozornej generatora. Dla reaktancji wartością odniesienia jest stosunek znamionowych wartości napięcia fazowego do prądu fazowego.

gdzie

$$c = 1 + \frac{X_z}{X_k} (1 - a).$$

Odległość punktu A od początku reaktancji przesyłowej określona jest stosunkiem reaktancji odcinka, od początku linii przesyłowej do punktu A do łącznej reaktancji przesyłowej

$$a = \frac{X_{1A}}{X_z}.$$

Zastępczy układ przesyłowy po wystąpieniu zwarcia można przedstawić zgodnie z zasadą Thevenina jako generator pracujący na sztywną sieć o napięciu zastępczym U_1 , poprzez zastępczą reaktancję X_{z1} . Przy niezmienionej mocy turbiny generatora, na skutek zachwiania równowagi między mocą napędową P_t a zmniejszoną mocą P oddawaną przez generator, wirnik przyspiesza i dzięki rosnącej charakterystyce kątowej mocy przesyłowej może osiągnąć nowy stan równowagi. Nowy (ustalony) stan równowagi osiąga wirnik w zasadzie w procesie zanikających kołysań dookoła nowego położenia równowagi (określających stan nieustalony).

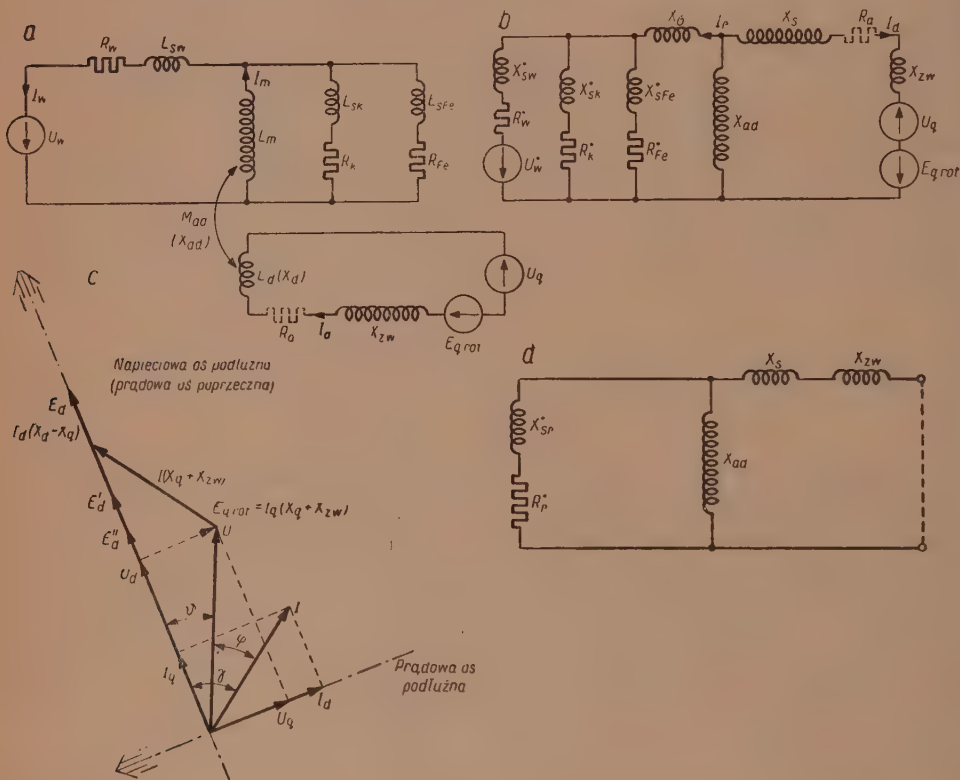
2. PRZEBIEGI ZACHODZĄCE W GENERATORZE W CZASIE ZWARCIOWYCH OBNIŻEK NAPIĘCIA PRZY JEDNOCZESNYM ZADZIAŁANIU AUTOMATU FORSOWANIA WZBUDZENIA

W pracy przyjęto, że w zasadzie generator pracuje bez automatycznej regulacji napięcia i wyposażony jest jedynie w automat forsowania wzbudzenia pobudzony przekaźnikiem podnapięciowym, nastawionym w praktyce na około 0,85 najniższego ruchowego napięcia generatora.

Automat forsowania wzbudzenia, w skład którego wchodzi najczęściej w praktyce stycznik zwierający opory dodatkowe w obwodzie wzbudzenia wzbudnicy, powoduje wzmożenie napięcia wzbudnicy do stałej wartości szczytowej.

Rozważania można uogólnić na przypadki, gdy generator wyposażony jest w automatyczny regulator napięcia, który przy głębokich zwarciovych obniżkach napięcia wysterowuje napięcie wzbudnicy również do stałej szczytowej wartości. Wartość ta, w praktyce, najczęściej leży poniżej wartości osiąganey przy stycznikowym forsowaniu wzbudzenia (jeżeli automatyczny regulator napięcia opory dodatkowe w obwodzie wzbudzenia wzbudnicy pozostawia nie zwarte). Szybkość działania nowoczesnych automatycznych regulatorów napięcia jest zwykle nieco mniejsza, ale w praktyce zbliżona do szybkości automatu forsowania wzbudzenia przy zwarciovych obniżkach napięcia.

W celu określenia zachowania się generatora w czasie forsowania przy zwarcu zewnętrznym można posłużyć się przybliżonym schematem zastępczym dla osi podłużnej generatora, przedstawionym na rys. 2a i 2b (oś podłużna pokrywa się z osią uzwojenia wzbudzenia wirnika). Na rysunku 2a przedstawiono schemat zastępczy obwodów wirnika, na którym uwidoczniło gałęzie klatki tłumiącej (L_{sk} , R_k), strug prądów wirowych bloku litego wirnika (L_{sFe} , R_{Fe}) oraz uzwojenia wzbudzenia (L_{sw} , R_w), które zasilane jest napięciem wzbudnicy U_w . Schemat zastępczy wirnika otrzymano z trzech sprzężonych magnetycznie obwodów wirnika podobnie jak w przypadku schematu transformatora trójuzwojeniowego.



Rys. 2a, b. Schemat zastępczy generatora w osi podłużnej.

Rys. 2c. Wykres promieniowy generatora w stanie ustalonym.

Rys. 2d. Uproszczony schemat zastępczy generatora synchronicznego przy zwarcu zewnętrznym.

Indukcyjność główna L_m obwodów wirnika sprzężona jest z uzwojeniem stojana (reaktancja oddziaływania X_{ad} reprezentuje indukcyjność wzajemną uzwojeń wirnika i stojana $X_{ad} = \omega_N M_{ad}$). Indukcyjność główną

należy traktować jako element bezoporowy (w stanie ustalonym gałęzie klatki i bloku wirnika są zwarte indukcyjnością L_m i nie przewodzą prądu).

W przypadku symetrycznego obciążenia faz stojana oddziaływanie twornika jest współbieżne z przepływem wirnika. W tym przypadku oddziaływanie stojana uwzględnione jest przez obwód stojana sprzężony z wirnikiem jak podano na schemacie zastępczym. Przy obciążeniu niesymetrycznym, składowa symetryczna zgodnej kolejności prądu stojana daje oddziaływanie współbieżne, przedstawione na schemacie zastępczym za pomocą prądu w obwodzie stojana, który jest sprzężony z obwodami wirnika. Składowa symetryczna odwrotnej kolejności faz daje przepływ wirujący względem wirnika z szybkością względną równą podwójnej szybkości synchronicznej, indukując odpowiednio w obwodach wirnika prądy podwójnej częstotliwości sieci. Superpozycja przebiegów zgodnej i przeciwnej kolejności daje przebieg wypadkowy. Schemat na rys. 2a przedstawia oś podłużną maszyny synchronicznej. Wpływ obciążenia uwidoczniono w składowej podłużnej oddziaływania stojana. W schemacie zastępczym dla składowej poprzecznej (oś oddziaływania stojana w położeniu poprzecznym do osi uzwojenia wzbudzenia) udział uzwojenia wzbudzenia nie istnieje. W stanie ustalonym napięcie sieci oraz siła elektromotoryczna rotacji generatora, wynikająca z ruchu pola maszyny względem uzwojeń twornika², równoważą się wzajemnie jeżeli pominiemy opory czynne stojana i sieci zewnętrznej (wówczas $U_q = E_{q \text{ rot}}$, $U_d = E_{d \text{ rot}}$). Przebiegi w osi podłużnej bądź poprzecznej analizujemy na podstawie schematu zastępczego osi podłużnej lub poprzecznej maszyny synchronicznej, zgodnie z dwuosiową teorią [4].

W schematach zastępczych uwidoczniono prądy stojana. Prądy te przedstawione są rzutami promieni na prądowe osie podłużną (oś uzwojenia wzbudzenia) i poprzeczną, natomiast promienie napięcia rzutowane są na napięciowe osie obrócone względem prądowych o 90° . Napięcie rotacji $E_{q \text{ rot}} = \omega \Psi_q = J_q (X_q + X_{zw})$ jest proporcjonalne do liniozwoi sprzężonych z uzwojeniem stojana w osi poprzecznej. Liniozwoje powstają w stanie ustalonym w skutek poprzecznego oddziaływania twornika maszyny synchronicznej.

W okresach zmian pola magnetycznego generatora, w obwodach stojana i wirnika powstaje dodatkowa siła elektromotoryczna transformacji, która łącznie z napięciem wzbudnicy, napięciem sieci i siłą elektromotoryczną rotacji określa przebiegi nieustalone generatora.

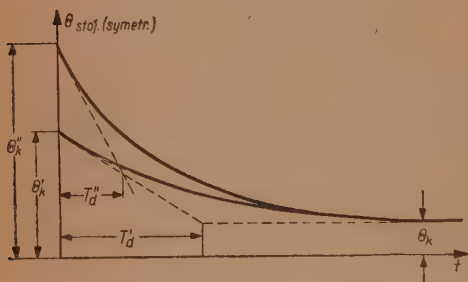
² Symetryczną reaktancję sieci zewnętrznej X_{zw} formalnie można włączyć do wewnętrznej reaktancji uzwojeń twornika generatora. Otrzymuje się przez to powiększenie zastępczej reaktancji rozproszenia twornika $X_{z \text{ zast}} = X_s + X_{zw}$.

Na rysunku 2c przedstawiono wykres promieniowy maszyny synchronicznej dla stanu ustalonego, na którym zaznaczono pokazane w schemacie zastępczym osi podłużnej napięcie sieci i siłę elektromotoryczną rotacji. Wykres wykonano przy pominięciu znikomych oporów czynnych twornika ($R_a \approx 0$).

W chwili zwarcia symetrycznego zmniejsza się napięcie sieci, a obwody stojana zwarte przez reaktancję zewnętrzną X_{zw} (transformator blokowy oraz reaktancja sieci) dają oddziaływanie współbieżne z wirnikiem i dlatego na schemacie zastępczym można je przedstawić jednym obwodem sprzężonym z wirnikiem.

W przypadku zwarcia na zaciskach ($\alpha = 0$) zastępcze napięcie sieci U_z zanika uderowo do zera i nie wpływa na przebiegi zwarciove generatora.

W celu otrzymania fizykalnego obrazu przebiegów impedancję zewnętrzną generatora można w przybliżeniu traktować, w chwili zwarcia, jako czysto reaktywną (oddziaływanie twornika jest zatem tylko podłużne, to znaczy pokrywa się z osią magnetyczną wirnika). Przy zwarciach sieciowych generatora obciążonego mocą czynną, rozważania dotyczą składowej podłużnej oddziaływania twornika. W chwili zwarcia strumień sprzężony z obwodami wirnika i stojana (określający energię pola magnetycznego) nie może ulec skokowej zmianie. W obwodzie stojana pojawia się prąd podprześciowy dający na reaktancji podprześciowej spadek napięcia równy napięciu E''_d przed zwarciem. W miarę upływu czasu prąd stojana zmniejsza się do wartości prądu zwarcia ustalonego. Na rysunku 3



Rys. 3. Przebieg stojana przy symetrycznym zwarciu trójbiegunowym.

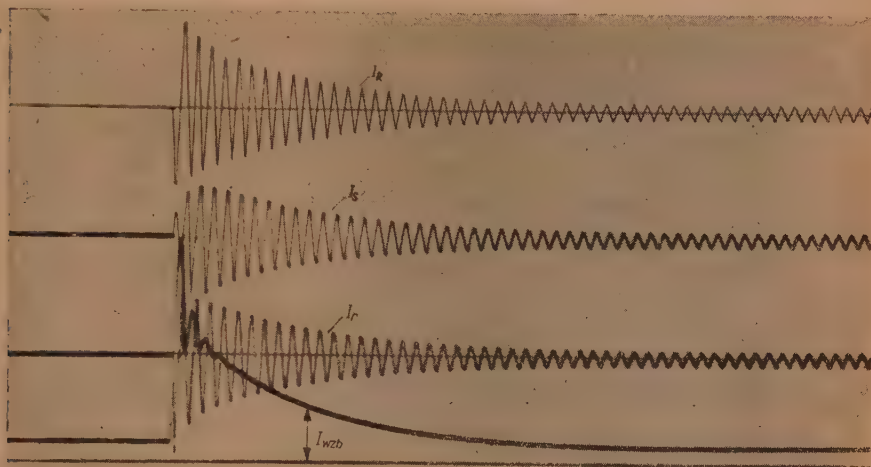
przedstawiono przebieg przepływu (SMM) stojana w czasie (na przepływ składają się prądy symetryczne 3 faz). W pierwszej chwili zwarcia w uzwojeniu stojana pojawia się (nie uwidoczniła na rys. 3) składowa aperiodyczna prądu zanikająca bardzo szybko i dająca pole o praktycznie stałej osi względem stojana. Pole to wiruje względem wirnika z szybkością synchroniczną i praktycznie nie wpływa na zmiany pola głównego

wirnika (pole to indukuje w wirniku prądy zmienne, widoczne na oscylogramach prądu wirnika w czasie zwarcia). Na rysunku 4 przedstawiony jest oscylogram zwarcia symetrycznego generatora małej mocy; na oscylogramie w prądzie wzbudzenia widoczna jest składowa zmienna częstotliwości sieci, nakładająca się na prąd wyrównawczy wirnika.

Rozmagnesowującemu oddziaływaniu stojana przeciwstawia się w wirniku wyrównawczy przepływ przejściowy, podtrzymujący strumień (linio-

zwoje) rotora. Przepływ ten można wyrazić (sprowadzonym na stronę uzwojenia wzbudzenia) wyrównawczym prądem uzwojenia wzbudzenia $I_{r \text{ wyr.}}$. W rzeczywistości przepływ prądowy wirnika rozkłada się na trzy gałęzie: wzbudzenia, klatki i bloku litego wirnika (rys. 2).

W pierwszej fazie zjawiska zwarcia można przyjąć, że przepływ w pierwszej chwili rozkłada się odwrotnie proporcjonalnie do indukcyjności rozproszeń obwodów wirnika i zanika w okresie podprześciowym wykładnika ze stałymi czasowymi okresu podprześciowego gałęzi rozpro-



Rys. 4. Oscylogram prądu zwarcia trójbiegunowego:

I_R , I_s , I_t — prądy fazowe twornika generatora, I_{wzb} — prąd uzwojenia wzbudzenia generatora.

szczenia klatki tłumiącej i bloku litego wirnika. Stałe czasowe tych gałęzi, określone oporami biernymi i indukcyjnościami rozproszeń, są bardzo małe (rzędu 0,1 sek). Dla uproszczenia obliczeń przebieg podprześciowy zwarcia można pominąć i operować jedynie składową przejściową prądu zwarcia (w istocie przebieg podprześciowy, na rys. 3 zaznaczony wykładniczą funkcją prądu o stałej czasowej T_d'' , jest o wiele bardziej skomplikowany i stanowi wynik nałożenia się przebiegów wykładniczych podprześciowych, określonych udziałem gałęzi rozproszenia klatki tłumiącej i prądów wirowych wirnika).

Na rys. 2b przedstawiono schemat zastępczy osi podłużnej generatora z rys. 2a przy sprowadzeniu wszystkich obwodów wirnika na stronę uzwojenia stojana (sprowadzone wartości elementów obwodów wirnika zaznaczono kropkami). Zamiast indukcyjności L wprowadzono na rysunku reaktancję $X = \omega_N L$.

Reaktancja X_σ odpowiada tak zwanej łącznej indukcyjności rozproszenia obwodów wirnika [4] przyporządkowanej strumieniowi rozproszenia

splatającego się z wszystkimi uzwojeniami wirnika. Dla przybliżonych obliczeń rozkładu prądów w obwodach wirnika po upływie okresu podprześciowego można pominąć na schemacie zastępczym indukcyjności rozproszeń gałęzi równoległych ($X'_{sw} \approx 0$, $X'_{sk} \approx 0$, $X'_{sFe} \approx 0$). Przepływ wyrównawczy wirnika rozdziela się wtedy na poszczególne obwody wirnika odwrotnie proporcjonalne do oporności czynnych odnośnych gałęzi, a zatem wprost proporcjonalnie do udziału stałych czasowych obwodów wirnika ($T'_{w0} \approx \frac{L_m}{R_w}$, $T'_{k0} \approx \frac{L_m}{R_k}$, $T'_{Fe0} \approx \frac{L_m}{R_{Fe}}$) w całkowitej stałej czasowej generatora na biegu jałowym, przy otwartym uzwojeniu twornika

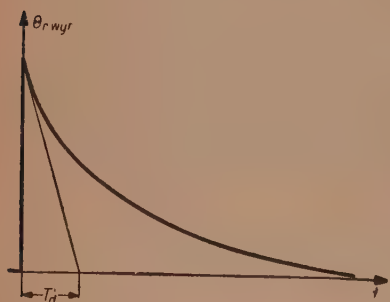
$$T'_{d0} = T'_{w0} + T'_{k0} + T'_{Fe0}.$$

Operowanie stałymi czasowymi generatora na biegu jałowym dla obliczeń rozkładu prądów wirnika w stanie przejściowym jest bardzo wygodne, ponieważ stałe te nie zależą od wartości reaktancji zewnętrznej (stałe czasowe stanu przejściowego zależą od wypadkowej indukcyjności generatora, widzianej od strony uzwojenia

wirnika $\omega_N L = X_\sigma + \frac{X_{ad}(X_s + X_{zw})}{X_{ad} + X_s + X_{zw}}$). Poza

tym, stosunkowo proste metody pomiarowe pozwalają łatwo wyznaczyć powyższe stałe czasowe generatora.

Na rysunku 5 przedstawiono przebieg wyrównawczego przepływu wirnika znikający wykładniczo ze stałą czasową przebiegu przejściowego



Rys. 5. Przepływ wyrównawczy wirnika.

gdzie

$X'_d = X_{ad} + X_s$ — reaktancja podłużna przejściowa generatora,

X_{zw} — reaktancja zewnętrzna,

X_d — reaktancja synchroniczna podłużna generatora.

Względny prąd wyrównawczy wirnika w pierwszej chwili zwarcia będzie

$$T'_d = T'_{d0} \frac{X'_d + X_{zw}}{X_d + X_{zw}}, \quad (4)$$

$$i_{r \text{ wyr}} = \left[\frac{E'_d - U_d}{X'_d + X_{zw}} - I_{dp} \right] (X_d - X'_d) I_{w0}, \quad (5)$$

gdzie

I_{w0} — prąd wzbudzenia biegu jałowego dla napięcia znamionowego (A),

I_{dp} — wartość składowej podłużnej prądu stojana przed zwarciem.

W przypadku zwarcia na zaciskach generatora uprzednio nie obciążonego ($U_d = 0$, $I_{dp} = 0$), otrzymamy

$$I_{r\text{ wyr}} = \frac{E'_d}{X_d} (X_d - X'_d) I_{w0}.$$

Wyżej podana wartość prądu wyrównawczego jest wynikiem szeregu praktycznie dopuszczalnych uproszczeń.

Aby obliczyć prąd stojana I_d i sprowadzony wyrównawczy prąd wirnika $I_{r\text{ wyr}}$ w stanie przejściowym generatora, wychodzimy z założenia, że równoległe gałęzie uzwojenia wzbudzenia (X'_{sw}, R_w), klatki tłumiącej (X'_{sk}, R_k) oraz bloku litego wirnika (X'_{sFe}, R_{Fe}) zastąpiono dla stanu przejściowego równoważnym obwodem, złożonym z szeregowego połączenia reaktancji X'_r, R_r (rys. 2d). Założenie takie jest teoretycznie zawsze ścisłe, jeżeli wszystkie trzy równoległe gałęzie posiadają identyczny stosunek reaktancji rozproszeń do oporności czynnej. W rzeczywistości, stosunek ten różni się znacznie dla rozpatrywanych obwodów, wskutek czego równoważne wartości X'_{sr} i R_r ważne są wyłącznie dla stanu przejściowego generatora i zależą od wartości reaktancji zewnętrznej X_{zw} [5]. Zależność X'_{sr} od X_{zw} jest jednakże na ogół nieznacząca, tak iż dla celów praktycznych można przyjąć stałą wartość reaktancji X'_{sr} w stanie przejściowym generatora.

Wartość oporności zastępczej R'_r można uważać w stanie przejściowym jako opór zastępczy równoległego połączenia oporów R_w, R_k, R_{Fe} . Tym sposobem obliczenie prądu stojana i prądu wyrównawczego wirnika zostaje sprowadzone formalnie do zagadnienia analizy prostej maszyny synchronicznej z jednym obwodem w wirniku, w której napięcie E'_d odpowiada liniozwojom splatającym się z uzwojeniem wzbudzenia. Składowa zmienna prądu zwarcia wynosi wówczas, zgodnie z zasadą zachowania niezmiennych liniozwoi wzbudzenia w pierwszej chwili zwarcia,

$$I'_d = \frac{E'_d}{X'_d + X_{zw}},$$

X'_d otrzymano tu z uproszczonego schematu zastępczego na rys. 2d jako zastępczą reaktancję (widzianą od strony sieci), obliczoną przy pominięciu oporów czynnych.

Prąd I_d zmniejsza się ze stałą czasową T'_d (równanie 4) od wartości I'_d do wartości ustalonego prądu zwarcia. Wartość ustaloną prądu zwarcia otrzymujemy z podstawowych zależności maszyny synchronicznej nie wymagających posługiwania się teorią dwuosiową.

Prąd wyrównawczy $I_{r\text{ wyr}}$ otrzymujemy na podstawie schematu zastępczego z rysunku 2d, zgodnie z zasadą zachowania liniozwoi wirnika.

$$I_{r\text{ wyr}} X'_{sr} + [I_{r\text{ wyr}} - (I'_d - I_{dp})] X_{ad} = 0,$$

skąd

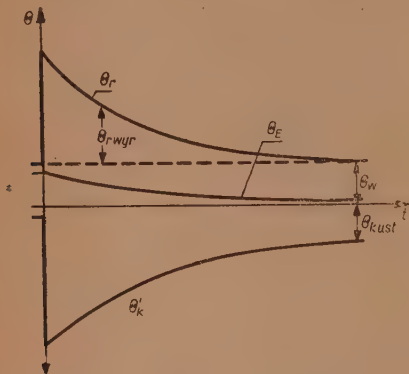
$$I_{r\text{ wyr}} = \frac{I'_d - I_{dp}}{X_{sr} + X_{ad}} X_{ad},$$

lub po sprowadzeniu na stronę uzwojenia wzbudzenia

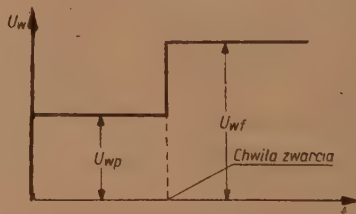
$$\begin{aligned} I_{r\text{ wyr}} &= \frac{I_{r\text{ wyr}}}{I_{w0}} I_{w0} = I_{r\text{ wyr}} \frac{X_{ad}}{U_N} I_{w0} = \\ &= (I'_d - I_{dp}) \frac{X_{ad}^2}{X_{sr} + X_{ad}} I_{w0} = (I'_d - I_{dp}) (X_d - X'_d) I_{w0}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu wartości prądu I'_d otrzymujemy równanie (5). Przepływ wyrównawczy nakłada się na wymuszony przepływ prądowy uzwojenia wzbudzenia zasilanego ze wzbudnicy generatora. W przypadku, gdy generator nie posiada automatu forsowania wzbudzenia i pracuje bez automa-

tycznego regulatora napięcia, przepływ oddziaływania stojana powoduje, w miarę upływu czasu od chwili zwarcia, wygaśnięcie strumienia w szczelinie do wartości zachodzącej przy



Rys. 6. Przepływ generatora przy zwarcu symetrycznym (generator nie wyposażony w automat forsowania wzbudzenia)



Rys. 7. Idealny przebieg napięcia wzbudnicy w czasie forsowania.

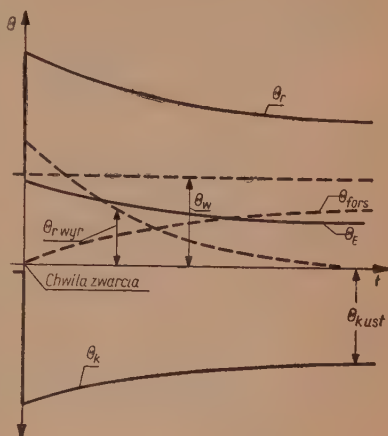
zwarcu ustalonym generatora (rys. 6). W przypadku zaś, gdy generator jest wyposażony w automat forsowania wzbudzenia, na przepływ wyrównawczy wirnika nakłada się dodatkowy przepływ forsowania θ_{fors} , wymuszony przez rosnące napięcie wzbudnicy.

Dla idealnego przypadku forsowania wzbudzenia o nieskończenie dużej stromości napięcia wzbudzenia i określonej wartości współczynnika forsowania wzbudzenia³ oraz bezzwłocznym pobudzeniu automatu forsowania, w chwili załamania napięcia przebiegi są również wykładnicze i wy-

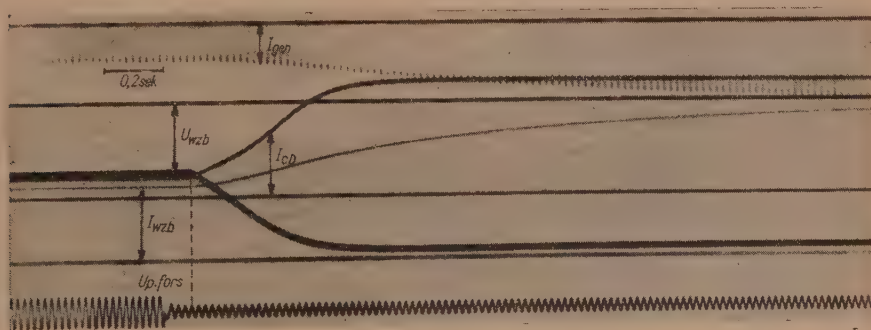
³ Współczynnik forsowania zdefiniowany jest jako stosunek szczytowego napięcia na uzwojeniu wzbudzenia generatora w czasie forsowania do napięcia w warunkach pracy znamionowej.

nikając z nakładania się przebiegów przepływu forsowania i zwarciegowego przepływu wyrównawczego. Na rys. 7 przedstawiono idealny przebieg napięcia wzbudnicy przy forsowaniu. Przepływ uzwojenia wzbudzenia Θ_w , przepływ forsowania Θ_{fors} i zwarciový przepływ wyrównawczy Θ_{rwy} dają wypadkowy przebieg przepływu wirnika Θ_r , który wraz z oddziaływaniem stojana składa się na wypadkowy przepływ Θ_E stwarzający strumień w szczelinie generatora (rys. 8).

Prąd stojana, a zatem przepływ oddziaływania stojana, będzie zmniejszał się do wartości odpowiednio większych, aniżeli to miało miejsce przy zwarcu generatora bez jednoczesnego forsowania. Na rys. 9a przedstawiono odbiegający od idealnego przebiegu z rys. 7 oscylogram narastania napięcia wzbudnicy U_{wzb} w czasie prób forsowania generatora 40 MVA, pracującego równolegle z siecią. Układ wzbudzenia przedstawiono na rys. 9b. Prąd wzbudnicy I_{wzb} odpowiada przebiegowi narastania przepływu $\theta_w + \theta_{fors}$ przy zwarciowej obniżce napięcia. Ponieważ próba forsowania wzbudzenia nie odbywa się przy zwarciowych obniż-



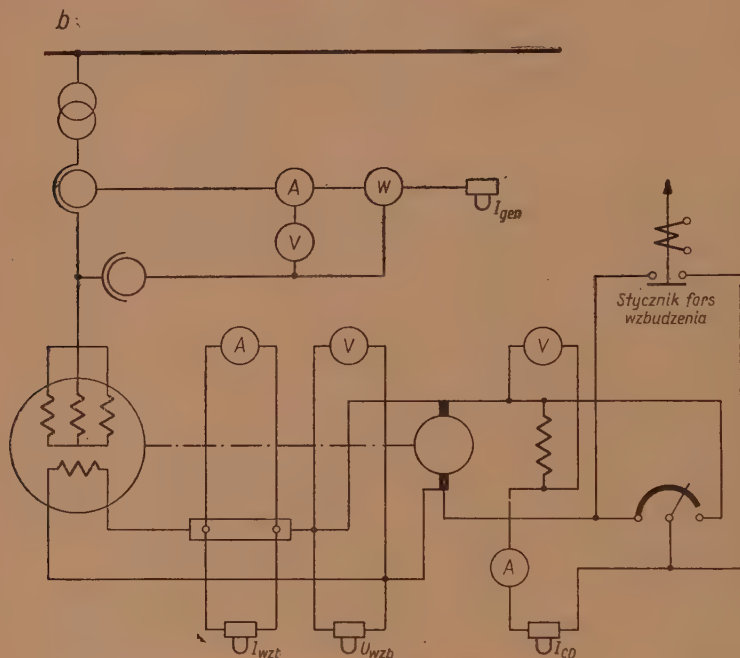
Rys. 8. Przepływ generatora przy zwarcu symetrycznym (generator wyposażony w automat forsowania wzbudzenia).



Rys. 9a. Oscylogram przebiegów przy próbie forsovania generatora 40 MVA: I_{gen} — prąd stojana, U_{wzb} — napięcie wzbudzenia generatora, I_{wzb} — prąd wzbudzenia generatora, I_{CD} — prąd wzbudzenia wzbudnicy generatora, U_{pfors} — napięcie na przekazywniku forsovania.

kach sieci, w prądzie wzbudzenia generatora nie pojawia się oczywiście prąd wyrównawczy. Na oscylogramie (rys. 9) widoczny jest poza tym przebieg narastania prądu generatora, prądu uzwojenia wzbudzenia

wzbudnicy I_{CD} oraz napięcie przełącznika forsowania $U_{p\text{ fors.}}$. W ciągu 0,08 sek po sztucznej obniżce napięcia zasilania przełącznika podnapięciowego załącza się stycznik forsowania wzbudzenia (na oscylogramie zaznaczono moment zwarcia kontaktów stycznika). Czas własny automatyki forsowania jest, jak widać z oscylogramu, znikomy.



Rys. 9b. Układ pomiarowy przy próbie forsowania.

Przy odpowiednio silnym forsowaniu, bądź zwarcia poza znaczną reaktancją, napięcie E'_d , dzięki przepływowi wzbudnicy, może utrzymać się niezmienione a nawet przy znacznych współczynnikach forsowania może w pewnych warunkach wzrastać. Tym samym zwiększa się moc synchronizująca generatora, decydująca o utrzymaniu pracy równoległej. Niżej zostanie rozpatrzony wpływ forsowania wzbudzenia generatora na pracę równoległą, przy zmienionej konfiguracji układu z rys. 1 po zwarcie linii przesyłowej w punkcie A.

3. WPLYW FORSOWANIA NA PRACĘ RÓWNOLEGLĄ GENERATORA W STANIE USTALONYM

W przypadku generatora o nieregulowanym wzbudzeniu ustalona moc graniczna obniża się do wartości

$$P_{g1} = \frac{U_1 E_d}{X_d + X_{z1}} = \frac{U_0 E_d}{c X_d + X_z [a(c-1) + 1]}, \quad (6)$$

która w stosunku do mocy granicznej w stanie przedawaryjnym jest obniżona $c - \frac{X_z}{X_d + X_z} \cdot (c-1)(1-a)$ razy. Przyjmując przykładowo przeciętne wartości $X_d \approx X_q = 1,40$, $X_z = 0,40$, $X_k = 0,10$, $a = 0,5$ (X_z oszacowano przyjmując, że na układ przesyłowy składają się dwa transformatory oraz linia średniej długości, wiążąca generator z systemem) otrzymamy

$$c = 1 + \frac{X_z}{2X_k} = 3,$$

$$U_1 = U_0 \cdot \frac{1}{3},$$

$$X_{z1} = X_z \frac{c+1}{2c} = \frac{2}{3} X_z.$$

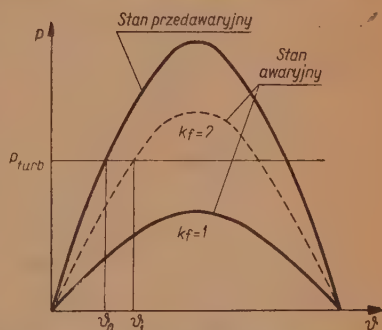
Charakterystyka kątowa mocy przesyłowej obniża się prawie 2,5 raza w stosunku do przypadku przedawaryjnego, uniemożliwiając pracę równoległą układu (rys. 10).

W przykładzie przyjęto znamionowy kąt mocy $\vartheta_0 = 39^\circ$ co odpowiada kątowi $\varphi = 30^\circ$ przy $E_d = 2,45$.

Po wprowadzeniu forsowania wzbudzenia generatora przy współczynniku forsowania $k_f = 2$ otrzymuje się dwukrotne zwiększenie mocy granicznej, zatem moc graniczna obniży się w stosunku do stanu przedawaryjnego jedynie 1,22 raza (rys. 10).

W niniejszych rozważaniach dla uproszczenia przyjęto zasadniczo prostoliniową charakterystykę magnesowania generatora (charakterystykę biegu jałowego). Założenie takie jest słuszne bez zastrzeżeń w przypadku turbogeneratorów dla obniżonych napięć w czasie zwarciovych zaburzeń w systemie, jednakże w przypadku generatorów z jawnymi biegunami wykazujących bardziej zagiętą charakterystykę biegu jałowego (szczególnie wskutek nasycenia krańców nabiegunków) należy posłużyć się zastępczą prostoliniową charakterystyką magnesowania.

Dzięki wprowadzeniu forsowania wzbudzenia nowy stan równowagi pracy równoległej staje się możliwy. Wirnik ustala swe położenie przy zwiększonym kącie mocy $\vartheta_2 = \arcsin [1,22 \cdot \sin \vartheta_0]$. Wskutek znacznej obniżki zastępczego napięcia sieci oraz reaktancji przesyłowej prąd generatora ustala się na wartości



Rys. 10. Statyczna charakterystyka kątowa generatora.

$$I = \frac{\sqrt{(k_f E_d)^2 + \left(\frac{1}{3} U_0\right)^2 - \frac{2}{3} k_f E_d U_0 \cos \vartheta_2}}{X_d + \frac{2}{3} X_z} = \frac{\sqrt{4,9^2 + 0,1 - 3,26 \cdot 0,65}}{1,66} = 2,8 I_N$$

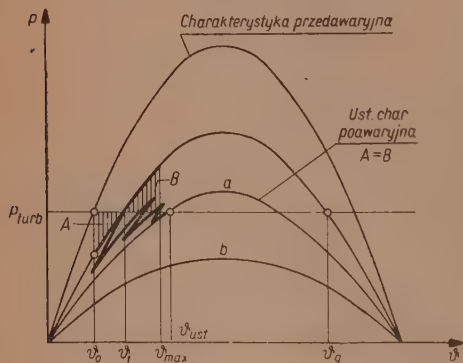
Zakładamy, że dzięki blokadzie napięciowej zabezpieczeń nadmiarowych generatora nie nastąpi wyłączenie generatora z sieci.

Odłączenie zwartego odcinka sieci powinno być w zasadzie zapewnione przez zabezpieczenie linii przesyłowej. W przypadku prawidłowego działania ochrony linii nastąpi szybkie odłączenie chorego odcinka sieci. Rozpatrywany przypadek w praktyce występuje wtedy, gdy zawiodły bezwzględne zabezpieczenia linii.

4. WPŁYW FORSOWANIA WZBUDZENIA NA RÓWNOWAGĘ DYNAMICZNĄ (W STANIE NIEUSTALONYM)

Wykazany w rozdz. 3 wpływ forsowania wzbudzenia na równowagę w stanie ustalonym jest bardzo znaczny, jednakże w czasie nieustalonym, bezpośrednio po zmianie konfiguracji układu, wpływ ten jest zmniejszony na skutek bezwładności elektromagnetycznej generatora oraz wzbudnicy.

Jak zaznaczono wyżej, końcowy stan równowagi osiągany jest w procesie przejściowym kołysań wirnika dookoła położenia równowagi.



Rys. 11. Dynamiczna charakterystyka kątowna generatora.

W chwili zwarcia obniżki napięcia sieci wirnik przyspiesza pod wpływem obniżki mocy elektrycznej oddawanej do sieci. W przypadku pominięcia wpływu momentu od zwiększonych strat zespołu (strat w miedzi stojana generatora powstałych z powodu znacznych nieustalonych przeciężeń zwarciovych, strat w obwodach wirnika w przypadku zwarć niesymetrycznych i zwiększonej mocy obciążenia wzbudnicy w przypadku wzbudnic osadzonych na wspólnym wale) oraz momentów

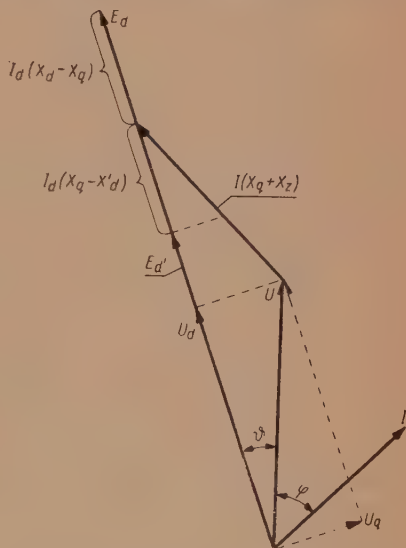
asynchronicznych tłumiących, powstałych przy poślizgach wirnika względem pola stojana, ruch wirnika spowodowany jest różnicą momentu turbiny i elektrycznego momentu synchronicznego (rys. 11).

Zwarciovym przepływ wyrównawczy wirnika przeciwstawiający się nagłej zmianie strumienia generatora, zwiększa w stosunku do stanu usta-

lonego po zwarceniu moment elektryczny, który przy pominięciu bezwładności magnetycznej osi poprzecznej wirnika wyraża się

$$P = -\frac{E_d' U}{X_d' + X_z} \sin \vartheta + \frac{1}{2} U^2 \left(\frac{1}{X_q + X_z} - \frac{1}{X_d' + X_z} \right) \sin 2\vartheta, \quad (7)$$

E_d — podłużne napięcie wewnętrzne generatora za reaktancją przejściową,

 X'_d — reaktancja przejściowa generatora w osi podłużnej.

gdzie

U_w — napięcie wzbudnicy wyrażone w jednostkach względnych przyjmując napięcie wzbudzenia generatora na biegu jałowym i przy napięciu znamionowym twornika jako wartość odniesienia.
 $I_{w0}R_w = U_{w0}$

T'_{d0} — stała czasowa generatora na biegu jałowym.

Z wykresu promieniowego maszyny synchronicznej (rys. 12) wynika

$$E_d = \frac{E'_d - U_d}{X'_d + X_z} (X_d + X_z) + U_d = E'_d \frac{X_d + X_z}{X'_d + X_z} - U_d \frac{X_d - X'_d}{X'_d + X_z} \quad (9)$$

Po podstawieniu wartości E_d z równania (9) do równania (8) otrzymuje się

$$E'_d + T'_d \frac{dE'_d}{dt} = U_w \frac{T'_d}{T'_{d0}} + \frac{X_d + X'_d}{X'_d + X_z} \frac{T'_d}{T'_{d0}} U_d, \quad (10)$$

gdzie $T'_d = T'_{d0} \frac{X'_d + X_z}{X_d + X_z}$ jest przejściową stałą czasową generatora, zmniejszoną w stosunku do stałej czasowej przy otwartym uzwojeniu twornika

na skutek oddziaływania obwodów stojana na uzwojenie wirnika.

Znając czasowy przebieg U_d i U_w oraz wychodząc z warunku początkowej niezmienności E'_d (co odpowiada niezmienności liniozwojów uzwojenia wzbudzenia), w pierwszej chwili zwarcia łatwo wyznaczyć z równania (10) przebieg E'_d i tym samym na podstawie wzoru (7) moc generatora. Nadmiar momentu turbiny ponad moment synchroniczny powoduje przyspieszenie wirnika. Przy osiągnięciu kąta ϑ_1 (rys. 11), odpowiadającego zrównaniu mocy turbiny i mocy elektrycznej, wirnik ma szybkość nad-synchroniczną, nadmiar zaś energii kinetycznej wirnika zamienia się na energię potencjalną, zwiększając kąt mocy i tym samym moment synchroniczny. Po osiągnięciu kąta ϑ_{\max} szybkość wirnika równa jest szybkości synchronicznej; nadmiar energii potencjalnej powoduje ruch powrotny wirnika. Stan ustalony (kąt ϑ_{ust}) osiągany jest w wyniku zanikających kołysań dzięki tłumiacemu momentowi asynchronicznemu. Ponieważ o utrzymaniu pracy równoległej decyduje pierwszy półokres kołysania, przeto wpływ forsowania wzbudzenia zmniejsza się w pierwszym rzędzie z powodu znacznej stałej czasowej generatora, która opóźnia narastanie prądu wzbudzenia, a zatem i napięcia wewnętrznego E'_d . W miarę narastania napięcia E'_d charakterystyka kątowa podnosi się przez co zmniejsza się maksymalny kąt mocy ϑ_{\max} , określony równością powierzchni

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} P_t d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} P d\vartheta. \quad (11)$$

Z drugiej strony, forsowanie wzbudzenia wywiera raczej niepożądany wpływ na powiększenie drugiej amplitudy kołysania w czasie powrotu wirnika z maksymalnego kąta wychylenia. Na skutek silnego tłumienia kołysań, dzięki znacznemu momentowi asynchronicznemu [3], [6] występującemu już przy nieznaczących poślizgach, zachodzi praktycznie zawsze zanikający proces kołysania.

Na rysunku 11 zaznaczono miejsca geometryczne charakterystyki kątowej w czasie kołysania (linia pogrubiona). Zaznaczono również ustaloną, poawaryjną charakterystykę kątową (krzywa *a*), która przedstawia zachowanie się generatora w czasie zanikających kołysań. Ustalona charakterystyka kątowa leży poniżej charakterystyki kątowej w stanie przejściowym (określonym przepływem wyrównawczym wirnika maszyny synchronicznej), ponieważ przyjęty współczynnik forsowania wzbudzenia nie zapewnia pełnego utrzymania strumienia w szczelinie. Bez zastosowania forsowania wzbudzenia, ustalona charakterystyka poawaryjna (krzywa *b*) znajdowałaby się poniżej linii mocy turbiny, uniemożliwiając pracę ustaloną generatora. W powyższych rozważaniach pominięto wpływ bezwładności magnetycznej osi poprzecznej (wpływ bezwładności magnetycznej osi poprzecznej powoduje zwiększenie oraz przesunięcie charakterystyki kątowej względem charakterystyki statycznej, z powodu oddziaływania prądów indukowanych w obwodach osi poprzecznej, które utrzymują w pierwszej chwili niezmienny poprzeczny strumień w szczelinie).

Ruch wirnika określony jest równaniem

$$P_t - P = T_r \frac{1}{\omega} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}. \quad (12)$$

T_r oznacza tu stałą rozruchową zespołu generatora, odpowiadającą czasowi, po którym układ dochodzi do szybkości synchronicznej pod działaniem momentu znamionowego, idącego na przyspieszenie mas. Całkując równanie (12) obustronnie względem kąta ϑ w granicach od ϑ_0 do ϑ_{\max} otrzymamy

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} P_t d\vartheta - \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} P d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} T_r \frac{1}{\omega} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} d\vartheta = T_r \frac{1}{\omega} \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \Big|_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} = 0. \quad (13)$$

Równość powierzchni *A* i *B* na rys. 11 określa granice maksymalnych kątów mocy. Przy przekroczeniu dynamicznego granicznego kąta mocy ϑ_g w czasie pierwszego kołysania powstaje różnica momentu turbiny oraz momentu synchronicznego i powoduje dalsze powiększenie kąta mocy, w wyniku czego generator wypada z synchronizmu. W celu utrzymania pracy równoległej w czasie pierwszego kołysania przy zaburzeniu, wartość znamionowego kąta mocy powinna być znacznie mniejsza od wartości sta-

tycznego kąta granicznego (90°). Maksymalna moc przesyłowa, przy której dla rozpatrywanego zaburzenia układ nie wypada z synchronizmu, określona jest jako graniczna moc dynamiczna układu przesyłowego P_{d0} .

W przypadku współpracy dwóch maszyn synchronicznych można sprowadzić układ do rozpatrywanego wyżej przypadku pracy maszyny synchronicznej na sieć sztywną jeżeli drugi składnik⁴ jest do pominięcia w wyrażeniu mocy (równanie 7).

Dla najprostszego przypadku współpracy generatora synchronicznego, zasilającego silnik synchroniczny poprzez reaktancję X_z , otrzymuje się

$$\frac{T_{r1}}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_1}{dt^2} = P_t - \frac{E'_{d1} E'_{d2}}{X_z + X'_{d1} + X'_{d2}} \sin \vartheta_{1,2}, \quad (14a)$$

$$\frac{T_{r2}}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_2}{dt^2} = -P_t + \frac{E'_{d1} E'_{d2}}{X_z + X'_{d1} + X'_{d2}} \sin \vartheta_{1,2}, \quad (14b)$$

gdzie

ω — pulsacja sieci,

T_{r1}, T_{r2} — rozruchowa stała czasowa zespołów maszyn synchronicznych odpowiadająca czasowi, po którym układ dochodzi do szybkości synchronicznej pod działaniem momentu znamionowego idącego na przyspieszenie mas,

P_t — moc turbiny generatora,

$\vartheta_{1,2} = \vartheta_1 - \vartheta_2$ — kąt mocy zawarty między promieniami podłużnych napięć wewnętrznych współpracujących maszyn synchronicznych.

Mnożąc stronami równanie dla jednej maszyny synchronicznej przez wartości T_r drugiej maszyny, po odjęciu stronami równań (14a) i (14b) otrzymamy

$$\frac{T_{r1} T_{r2}}{\omega} \frac{d^2 \vartheta_{1,2}}{dt^2} = P_t (T_{r2} + T_{r1}) - \frac{E'_{d1} E'_{d2}}{X_z + X'_{d1} + X'_{d2}} (T_{r1} + T_{r2}) \sin \vartheta_{1,2}.$$

Po przekształceniu będzie

$$\frac{T_{r1} T_{r2}}{\omega} \frac{X'_{d1} + X'_{d2} + X_z}{(T_{r1} + T_{r2}) E'_{d1} E'_{d2}} \frac{d^2 \vartheta_{1,2}}{dt^2} = P_t \frac{X'_{d1} - X'_{d2} - X_z}{E'_{d1} E'_{d2}} - \sin \vartheta_{1,2}. \quad (15)$$

⁴ Podczas, gdy drugi składnik wyrażenia mocy we wzorze (1) dla kątów $0 < \vartheta < 90^\circ$ jest dodatni, ponieważ $X_z > X_q$ w przypadku wzoru (7) drugi składnik jest zwykle ujemny, ponieważ przeciętnie $X_d < X_q$. Wskutek wpływu reaktancji przesyłowej składnik ten jest zwykle mały w porównaniu z pierwszym składnikiem mocy.

Wprowadzając zastępczą zredukowaną wartość mocy

$$P'_t = P_t \frac{X'_{d1} + X'_{d2} + X_z}{E'_{d1} E'_{d2}} \quad (16)$$

oraz zastępczą zredukowaną wartość czasu

$$\tau = t \sqrt{\frac{T_{r1} + T_{r2}}{T_{r1} \cdot T_{r2}}} \frac{E'_{d1} \cdot E'_{d2}}{X'_{d1} + X'_{d2} + X_z} \quad (17)$$

mamy

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = P'_t - \sin \vartheta,$$

gdzie

$$\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2.$$

Przypadek pracy równoległej generatora na sieć sztywną można uważać jako przypadek szczególny współpracy dwóch maszyn, z których jedna, o nieskończenie dużej mocy znamionowej, ma parametry $T_{r2} \rightarrow \infty$ oraz

$$X'_{d2} = 0 \quad \text{i} \quad E'_{d2} = U.$$

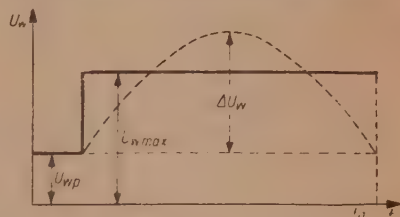
Naturalnie równania opisujące prostszy przypadek współpracy generatora z siecią sztywną za pomocą zredukowanej wartości mocy turbiny i czasu można otrzymać również bezpośrednio. W pracy niniejszej obrano nieco okrężną drogę w celu wykazania, zaznaczonej na wstępie, możliwości zastąpienia współpracy dwóch maszyn synchronicznych prostszym przypadkiem pracy na sieć sztywną.

Analiza ruchu układu w stanie nieustalonym jest bardzo skomplikowana i wymaga przybliżonych metod całkowania. Dla określenia ilościowego wpływu forsowania wzbudzenia na równowagę dynamiczną generatora można wyjść z doświadczalnie potwierdzonego przybliżenia [2], dla ruchu układu pracującego przy obciążeniu graniczną dynamiczną mocą, według którego układ wykazuje zwiększenie dynamicznej mocy granicznej na skutek regulacji napięcia wzbudnicy zależnie od wartości całki

$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} U_w d\vartheta$, lecz niezależnie od przebiegu czasowej funkcji krzywej napięcia wzbudzenia.

W przypadku pominięcia bezwładności elektromagnetycznej wzbudnicy przy forsowaniu utrzymuje się idealny przebieg napięcia wzbudnicy odznaczający się nieskończenie dużą stromością i określonym współczynnikiem forsowania (rys. 13).

Przy upraszczających założeniach stałości napięcia wzbudzenia generatora w okresie nieustalonych przebiegów dynamicznych, metodami wy-



Rys. 13. Idealny i zastępczy przebieg napięcia wzbudnicy przy forsowaniu.

kreślnymi wyznaczono czasowe przebiegi kąta mocy przy pierwszym wychyleniu (na podstawie równania 13). Przebiegi zostały potwierdzone przez pomiary podane w literaturze zagranicznej [7] dla przypadku generatora o nieuregulowanym stałym napięciu wzbudzenia.

Na rysunku 14a przedstawiono gromadę krzywych $\vartheta = f(\tau)$ dla układu przesyłowego takiego jak na rysunku 1, w funkcji zredukowanego czasu, bdniesionego do parametrów układu

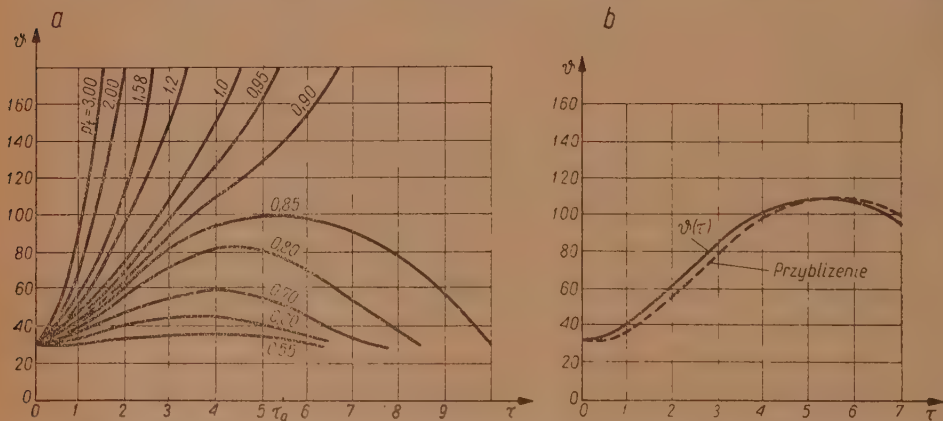
$$\tau = t \sqrt{\frac{\omega}{T_r} \frac{E_d U_0}{X_d' + X_z}}$$

Gramadę krzywych wykreślono dla różnych wartości zredukowanych obciążeń turbiny

$$P_t' = P_t \frac{X_z + X_d'}{U_0 E_d'}$$

Przyjęty w wykresie kąt obciążenia wynosi $\vartheta_0 = 30^\circ$.

Na rysunku 14a można zauważyć, że przy przekroczeniu pewnej granicznej mocy P_t' kąt mocy ϑ nie maleje po pierwszym wychyleniu wirnika



Rys. 14a. Gromada krzywych $\vartheta = f(\tau)$ dla różnych mocy zredukowanych turbiny.

Rys. 14b. Przebieg kąta mocy przy obciążeniu generatora mocą graniczną P_d .

(co stanowi warunek konieczny do osiągnięcia stanu ustalonego) i w miarę powiększenia kąta mocy powoduje w rezultacie wypadnięcie z synchronizmu.

Można przyjąć w przybliżeniu, że na skutek forsowania wzbudzenia charakter krzywych $\vartheta = f(\tau)$ nie ulegnie praktycznie zmianie i dla przypadku obciążenia granicznego krzywą $\vartheta = f(\tau)$ lub $\vartheta = f(t)$ można aproksymować wyrażeniem (por. rys. 14b)

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{1}{2} \left(\vartheta_{\max} - \vartheta_0 \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{\tau_g} \tau \right)$$

albo

$$\vartheta = \vartheta_0 - \frac{1}{2} \left(\vartheta_{\max} - \vartheta_0 \right) \left(1 - \cos \frac{\pi}{t_g} t \right). \quad (18)$$

w którym t_g odpowiada czasowi potrzebnemu do osiągnięcia przez wirnik kąta $\vartheta_{\max} = \vartheta_g$. Czas ten jest w przybliżeniu równy półokresowi pierwszego kołysania. Przebieg napięcia wzbudzenia w pierwszym półokresie kołysania można zastąpić, zgodnie z przyjętymi założeniami, przebiegiem równo-

ważnym o jednakowej powierzchni $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} U_w d\vartheta$.

Zakłada się przebieg równoważny

$$U_w = U_{wp} + \Delta U_w \sin \left(\frac{\pi}{t_g} t \right). \quad (19)$$

Na rysunku 13 przedstawiony jest przebieg równoważny napięcia uzwojenia wzbudzenia generatora (według założenia).

Funkcja $U_w = f(\vartheta)$ wyrażona równaniami (18) i (19) za pomocą parametru t , przedstawia równanie elipsy (rys. 15). Z porównania powierzchni półelipsy i prostokąta otrzymuje się

$$\Delta U_w = \frac{4}{\pi} (U_{w \max} - U_{wp}).$$

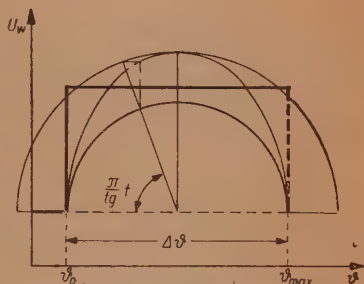
Dla przypadku $U_{wp} = U_{wN}$, $U_{w \max} = k_f \cdot U_{wN}$

$$\Delta U_w = U_{wN} \frac{4}{\pi} (k_f - 1).$$

Dla równoważnego przebiegu napięcia wzbudnicy, przebieg napięcia E'_d w okresie niustalonym określa równanie (10), w którym uwzględniono wartość U_w z równania (19)

$$E'_d + T'_d \frac{dE'_d}{dt} = \frac{T'_d}{T_{d0}} \left\{ U_{wp} + \frac{X_d - X'_d}{X_d + X_z} U_{d1} \right\} + \left\{ \frac{T'_d}{T_{d0}} \Delta U_w \sin \left(\frac{\pi}{t_g} t \right) \right\} \quad (10a)$$

oraz warunek początkowy niezmienności $E'_d = E'_{dp}$ dla $t = 0$. W celu wyodrębnienia wpływu forsowania wzbudzenia na przebieg napięcia E'_d , a tym samym na graniczną moc przesyłową, zostanie rozpatrzony przebieg przyrostu $\Delta E'_d$ ponad wartości E'_d , występujące w generatorze bez regulacji wzbudzenia, który pracuje na granicy stateczności dynamicznej. Porównując (10) i 10a) przy spełnionym warunku początkowym $\Delta E'_{d0} = 0$ dla $t = 0$ otrzymamy



Rys. 15. Charakterystyka napięcia wzbudzenia generatora w funkcji kąta mocy.

$$\Delta E'_d + T'_d \frac{d}{dt} \Delta E'_d = \frac{T'_d}{T'_{d0}} \Delta U_w \sin \left(\frac{\pi}{t_g} t \right). \quad (20)$$

Rozwiązanie powyższego równania różniczkowego pierwszego rzędu można przedstawić w postaci

$$\Delta E'_d = \frac{\Delta U_w}{T'_{d0}} \frac{t_g}{\pi} \left[e^{-\frac{t}{T'_d}} \cdot \cos \varphi - \cos \left(\frac{\pi}{t_g} t + \varphi \right) \right], \quad (21)$$

gdzie

$$\varphi = \arctg \left(\frac{t_g}{T'_d \pi} \right).$$

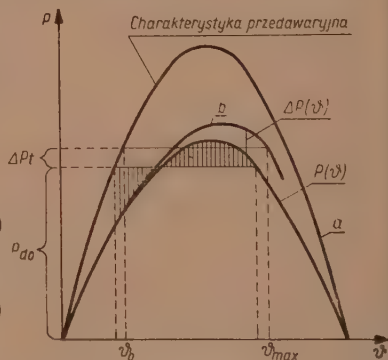
Przy przeciętnych wartościach $T'_d \approx 2s$, $\frac{\pi}{t_g} \approx 4 \frac{1}{s}$ praktycznie można pominąć przesunięcia ($\varphi \approx 7^\circ$) jak również zanikanie składnika aperiodycznego

we wzorze (20) w czasie pierwszego półokresu kołysania ($e^{-\frac{t}{T'_d}} \approx 1$). Sprowadza się to do pominięcia oporności czynnej wirnika w stosunku do wypadkowej indukcyjności. Dla bardzo bliskich zwarć sieciowych wypadkowa indukcyjność widziana od strony uzwojeń wirnika (rys. 2b) maleje znacznie ($T'_d \approx 1,5s$) i przy nieuwzględnieniu tłumienia powoduje nieco większe błędy, co powiększa obliczoną wartość mocy granicznej uzyskanej dzięki forsowaniu wzbudzenia. Można zatem przyjąć praktycznie

$$\Delta E'_d = \frac{\Delta U_w t_g}{T'_{d0} \pi} \left[1 - \left(\cos \frac{\pi}{t_g} t \right) \right]. \quad (22)$$

Porównując z przebiegiem $\vartheta = f(t)$ wzór (18) otrzymujemy

$$\Delta E'_d = 2 \frac{\Delta U_w t_g}{T'_{d0} \pi (\vartheta_{\max} - \vartheta_0)} (\vartheta - \vartheta_0). \quad (23)$$



Rys. 16. Charakterystyki katowe w pierwszym półokresie kołysania.

Otrzymany wynik pozwala ocenić analitycznie wpływ forsowania wzbudzenia na zwiększenie o wartość ΔP_t dynamicznej mocy granicznej w stosunku do mocy granicznej P_{d0} bez regulacji wzbudzenia. Na podstawie (13)

$$\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} (P_{d0} + \Delta P_t) d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} (P + \Delta P) d\vartheta. \quad (24)$$

Wpływ powiększenia E'_d na skutek forsowania odbija się tylko na pierwszym składniku określającym moc przesyłową we wzorze (7)

$$\Delta P = \frac{\Delta E'_d U_1}{X'_d + X_{z1}} \sin \vartheta.$$

Zatem po podstawieniu do wzoru (24)

$$\left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} (P_{d0} - P) d\vartheta \right\} + \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} \Delta P_t d\vartheta = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} \frac{\Delta E'_d U_1}{X'_d + X_{z1}} \sin \vartheta \cdot d\vartheta. \quad (25)$$

Na rysunku 16 przedstawiono przebieg charakterystyk kątowych ($P\vartheta$) w pierwszym półokresie kołysania przy stałym napięciu wzbudzenia (krzywa a) i przy wprowadzeniu forsowania wzbudzenia (krzywa b). Pierwsze wyrażenie nawiasowe w równaniu (25) jest w przybliżeniu równe zeru⁵. Wobec tego

$$\begin{aligned} \Delta P_t \Delta \vartheta &= \frac{2\Delta U_w U_1 t_g}{T_{d0}\pi \cdot \Delta \vartheta (X'_d + X_{z1})} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}} (\vartheta - \vartheta_0) \sin \vartheta d\vartheta, \\ \Delta P_t &= \frac{2\Delta U_w U_1 t_g}{T_{d0}\pi (X'_d + X_{z1})} \left(\frac{\sin \vartheta_{\max} - \sin \vartheta_0}{\Delta \vartheta^2} - \frac{\cos \vartheta_{\max}}{\Delta \vartheta} \right), \quad (26) \\ \Delta \vartheta &= \vartheta_{\max} - \vartheta_0. \end{aligned}$$

Wartość współczynnika $\frac{\sin \vartheta_{\max} - \sin \vartheta_0}{\Delta \vartheta^2} - \frac{\cos \vartheta_{\max}}{\Delta \vartheta}$ zmienia się w nie-

wielkich granicach przy praktycznie występujących kątach ϑ_0 i ϑ_{\max} i wynosi co najwyżej około 0,5 (maksymalne odchyłki są rzędu -12%).

Przy takich założeniach przybliżony (majoryzowany) wpływ forsowania wzbudzenia na zwiększenie dynamicznej mocy przesyłowej będzie

$$\Delta P_t = 0,4 \frac{U_{w \max} - U_{wp}}{T_{d0} (X'_d + X_{z1})} U_1 t_g. \quad (27)$$

⁵ Ściśle biorąc, całka $\int (P_{d0} - P) d\vartheta$ jest równa zeru dla granic ϑ_0 , ϑ_{\max} , które odpowiadają pierwszemu półokresowi kołysania przy granicznej mocy P_{d0} generatora bez regulacji wzbudzenia. Na skutek zwiększenia mocy granicznej o wartość ΔP_t zwiększają się nieco kąty ϑ_0 i ϑ_{\max} . Błąd wynikający z pominięcia tej małej zmiany granic jest nieznaczny i powoduje raczej zmniejszenie obliczonego wpływu forsowania wzbudzenia. Przyrost mocy $P_{d0} - P$ przy początkowych kątach mocy jest znacznie większy od wartości tych różnic przy kątach w pobliżu granicznego kąta mocy.

Przyjmując, dla poprzednio omawianego układu przesyłowego, średnio

$$X_d = 1,4, \quad X'_d = 0,2, \quad \cos \varphi_N = 0,8, \quad X_z = 0,4,$$

$$T'_{d0} = 6 \text{ s}, \quad T_r = 10 \text{ s}, \quad U_{wp} = 2,15, \quad \vartheta_0 = 30^\circ, \quad E'_{dp} = 1,27$$

przy zwarcu poprzez reaktancję otrzymuje się $X_k = 0,1$; $X_{z1} = 0,27$, $U_1 = 0,3$. Dla współczynnika forsowania $k_f = 2$ mamy

$$U_{w \max} - U_{wp} = 2,15.$$

Na podstawie rysunku 14 można przyjąć $\tau_g = 5,5$ skąd

$$t_g = 5,5 \sqrt{\frac{10}{314} \frac{0,2 + 0,27}{1,27 \cdot 0,3}} = 1,08 \text{ s},$$

z czego stąd po wstawieniu do wzoru (27)

$$\Delta P_t = 0,4 \frac{2,15}{6 \cdot (0,2 + 0,27)} 0,3 \cdot 1,08 = 0,098.$$

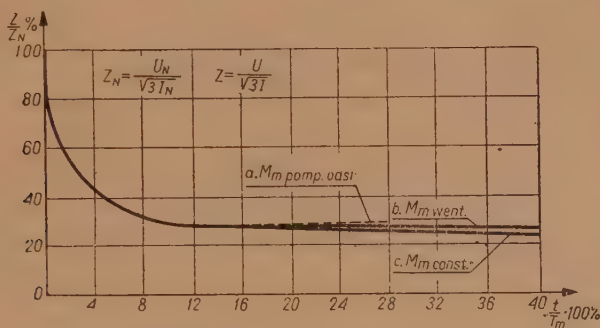
Zwiększenie dynamicznej mocy granicznej osiągane przez zastosowanie forsowania wzbudzenia wynosi zaledwie $\sim 10\%$.

Ekstrapolując otrzymany wynik można by oszacować, że po odłączeniu zwarcia w punkcie A (na rys. 1) wpływ forsowania zwiększa się $\frac{U_0 X'_d + X_{z1} t_{g0}}{U_1 X_{d1} + X_z t_g} = 1,4$ krotnie dzięki wzrostowi zastępczego napięcia zasilania

i osiąga wartość 14% (t_{g0} oznacza czas potrzebny do osiągnięcia przez wirnik granicznego kąta mocy ϑ_g ; czas obliczony jest dla parametrów układu po odłączeniu zwarcia). Ponieważ rachunek nie ujmował zmian przepływów wyrównawczych przed i po odłączeniu zwarcia, zatem w praktyce dla takiego przypadku otrzymuje się mniejszy wpływ forsowania aniżeli to wynika z ekstrapolacji.

Z punktu widzenia warunków eksploatacyjnych systemu, najczęstszy i najważniejszy przypadek zaburzenia pracy równoległej stanowią krótkotrwałe zwarcia na sieci. Dzięki szybko działającej ochronie linii następuje odłączenie chorego odcinka linii lub pospieszne powtórne załączenie, jeżeli linia wyposażona jest w automatykę SPZ. Przypadek taki różni się od analizowanego poprzednio dłuższego zwarcia w systemie (dłuższego od jednego półokresu kołysania), który przyjęto dla uproszczenia rozważań. Jednakże, jeżeli łączny czas trwania zwarcia jest bardzo mały (do wartości około 0,1 sek) wpływ forsowania na podniesienie równowagi dynamicznej można z praktycznie wystarczającą dokładnością ocenić na podstawie równania (27), wstawiając wartości parametrów systemu występujące po odłączeniu zwarcia.

Należy wziąć pod uwagę, że w praktycznych warunkach eksploatacyjnych poważną rolę mogą odegrać odbiory, złożone w przeważającej części z silników indukcyjnych, przyłączone w sąsiedztwie początku linii przesyłowej (potrzeby własne elektrowni) lub odgałęzień linii przesyłowych (na przykład odbiór P_{odb} oraz odbiór w punkcie A na rys. 1). Na skutek wybiegu silników przy zwarciowej obniżce napięcia odbiory te zmniejszają znacznie impedancję obciążenia (dla ilustracji na rys. 17 przedsta-



Rys. 17. Zależność impedancji silnika asynchronicznego od czasu wybiegu:

t — czas trwania zwarciowego zaniku napięcia, t_m — mechaniczna stała czasowa napędu, określona jako czas rozruchu napędu do obrotów znamionowych pod wpływem momentu znamionowego, a. — charakterystyka odnosząca się do napędów pomp odśrodkowych, b. — charakterystyka odnosząca się do napędu wentylatora, c. — charakterystyka odnosząca się do napędów o stałym momencie obciążenia.

wiono charakterystykę obniżki impedancji obciążenia silnika asynchronicznego w miarę upływu czasu przy zwarciowym zupełnym zaniku napięcia). Wpływają one również na pomniejszenie zastępczej reaktancji wiążącej generator z resztą systemu i na obniżenie wartości napięcia zastępczej sieci sztywnej (zgodnie ze stosowaną w poprzednich rozważaniach zasadą Thevenina). Obniżenie wartości reaktancji i napięcia zastępczego na skutek odbiorów indukcyjnych ma jednakże charakter przejściowy (w szczególności po krótkotrwałych zwarciach), ustępujący w miarę powtórnego samorozruchu silników.

Ilościowe ujęcie wpływu forsowania wzbudzenia na równowagę dynamiczną przy zmiennej elastycznej reaktancji zastępczej jest utrudnione, ponieważ wymaga dodatkowego uwzględnienia mechanicznych charakterystyk odbiorów. W takich warunkach zwiększa się wpływ forsowania wzbudzenia na równowagę dynamiczną. Następuje to na skutek przyspieszenia samorozruchu silników indukcyjnych w wyniku którego następuje szybsza odbudowa zastępczego napięcia sieci.

Jak wynika z powyższych rozważań, wbrew wyrażanemu często pogładowi forsowanie wzbudzenia generatorów nie wpływa (przy dopuszczalnym współczynniku forsowania $k_f=2$) znacznie na utrzymanie pracy równoległej w stanie nieustalonym pierwszego kołysania, które w praktyce przesądza utrzymanie współpracy i nie tu leżą cenne i zasadnicze zalety forsowania wzbudzenia. Na skutek bezwładności magnetycznej wzbudnicy, pominiętej w rozważaniach, rzeczywisty wpływ forsowania jest jeszcze mniejszy. Ponieważ jednak krzywa narastania kąta mocy $\vartheta=f(t)$ (por. rys. 14b) w sąsiedztwie początkowego kąta mocy jest stosunkowo płaska, to wpływ bezwładności magnetycznej zaznacza się mocno dopiero wtedy, gdy wartości stałych czasowych wzbudnicy są stosunkowo duże.

Dla układu przesyłowego, analogicznego jak na rys. 1, według pomiarów radzieckich [8] stała czasowa wzbudnicy rzędu 0,2—0,35, w porównaniu do przypadku wzbudzenia jonowego (stała czasowa wzbudnicy równa zero), zmniejszyła dynamiczną moc graniczną o około 2% (przyjęty współczynnik forsowania $k_f=2$; odłączenie zwarcia po około 0,1 s).

W celu powiększenia dynamicznej mocy granicznej autor wykonał przybliżone obliczenie, przy uwzględnieniu wpływu stałej czasowej wzbudnicy na skuteczność forsowania wzbudzenia, i stwierdził, że zmniejszenie stałej czasowej wzbudnicy powyżej wartości 0,1 s daje bardzo nieznaczny zysk. Tak na przykład, przy współczynniku forsowania $k_f=2$ powiększenie stałej czasowej wzbudnicy z wartości 0 do 0,1 s spowoduje zwyżkę wartości obliczonej równaniem (27) zaledwie o 10%.

Przy przyjęciu znacznie większego współczynnika forsowania, rzędu 4 (przyjmowanego już niekiedy za granicą), wpływ forsowania wzbudzenia zaczyna odgrywać poważniejszą rolę dla równowagi dynamicznej generatorów przy przebiegach nieustalonych. Przy wysokich współczynnikach forsowania, zmniejszenie stałej czasowej wzbudnicy nawet poniżej wartości 0,1 s daje znacznie większe zyski w dynamicznej mocy granicznej, aniżeli to ma miejsce przy stosowanym u nas w kraju współczynniku forsowania $k_f=2$. Dla dobra wytrzymałości termicznej wzbudnicy i wirnika generatora wskazane jest wprowadzenie, na przystosowanych do tego celu wzbudnicach, dwustopniowego układu forsowania wzbudzenia, który daje wysoki pułap napięcia wzbudnicy, o czasie trwania rzędu jednej sekundy oraz normalny dłuższy stopień forsowania o ograniczonym współczynniku forsowania do rzędu $k_f=2$. Ograniczony czas pierwszego stopnia jest poza tym korzystny ze względu na pożądane obniżenie amplitud kołysań układu po pierwszym wychyleniu wirnika. Pomiary przeprowadzone przez autora na generatorze mocy 60 MVA, którego wzbudnica posiada wysoki pułap wzbudzenia, wykazały celowość wprowadzenia takiego dwustopniowego forsowania wzbudzenia. Pierwszy stopień forso-

wania można łatwo ograniczyć za pomocą dodatkowego członu czasowego, wchodzącego w zespół automatu forsowania wzbudzenia (czas trwania pierwszego stopnia forsowania przyjęto przy próbach 1,0 s).

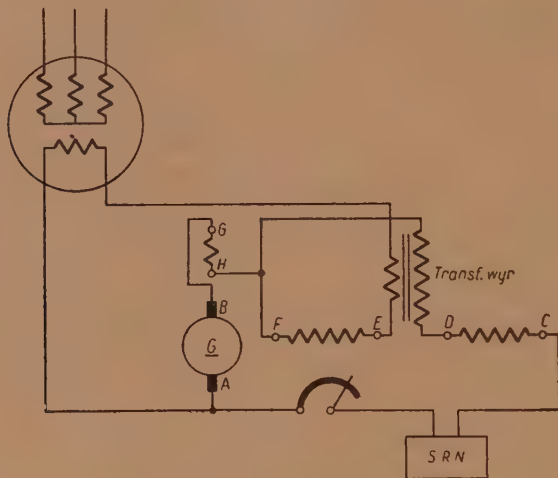
Spośród wielu sposobów zmniejszenia bezwładności elektromagnetycznej wzbudnicy przy zwarciovych obniżkach napięcia, na szczególną uwagę zasługuje wprowadzane obecnie coraz częściej wyposażenie wzbudnicy w silne zgodnie magnesujące uzwojenie szeregowo (dozwojenie szeregowo).

Przy zwarciovych obniżkach napięcia prąd wyrównawczy w uzwojeniu wzbudzenia generatora, płynący przez uzwojenie szeregowo wzbudnicy, wzmacnia napięcie wzbudnicy powiększając jej stromość napięcia wywołaną działaniem uzwojenia bocznikowego wzbudnicy. W teoretycznie skrajnym przypadku doboru uzwojenia szeregowego, odpowiadającego granicy szeregowego samowzbudzenia wzbudnicy, uzwojenie to utrzymuje stałość liniozwoi uzwojenia wzbudzenia generatora. Działanie uzwojenia szeregowego można zastąpić równoważnym zmniejszeniem oporu czynnego obwodu uzwojenia wzbudzenia generatora. Na granicy samowzbudzenia zastępczy opór wypadkowy równa się zeru. Na skutek tego uzwojenia wzbudzenia utrzymuje stałość liniozwoi skojarzonych z obwodem wzbudzenia generatora. Uzwojenie bocznikowe pracuje wówczas tylko w stanie nieustalonym i reguluje wyłącznie poziom liniozwoi uzwojenia wzbudzenia generatora.

Ze względu na niepewność utrzymania granicy samowzbudzenia, na skutek zmian oporności obciążenia wzbudnicy przy zmianach temperatury oraz na skutek szczególnie niekorzystnego wpływu histerezy magnetycznej wzbudnicy, tak silne uzwojenie szeregowo jest ruchowo niedopuszczalne. Praktycznie, amperozwoje uzwojenia szeregowego i bocznikowego są zbliżone przy pracy znamionowej wzbudnicy. Niekorzystną własnością takiego układu wzbudzenia jest fakt, iż uzwojenie bocznikowe wzbudnicy, umieszczone współosiowo z uzwojeniem szeregowym, zgodnie z prawem Lenza, w pierwszej chwili zwarciowej obniżki napięcia opóźnia działanie uzwojenia szeregowego sprzeciwiając się szybkiej zmianie strumienia głównego wzbudnicy, pojawiającego się udarowo pod wpływem prądu wyrównawczego. (W obwodzie uzwojenia bocznikowego pod wpływem zmian strumienia głównego wzbudnicy pojawia się prąd indukowany, który obniża szybkość narastania strumienia).

Wpływ sprzężenia indukcyjnego łatwo wyeliminować przyłączając do uzwojeń wzbudnicy specjalny transformator wyrównawczy z nastawialną szczeliną (rys. 18). SEM indukowana w uzwojeniu bocznikowym, przy zmianach strumienia głównego wzbudnicy kompensowana jest przez SEM wtórnej strony transformatora. Powoduje to, iż pod wpływem udarowego

wzrostu prądu obciążenia wzbudnicy (przy zwarciowych obniżkach napięcia sieci) napięcie wzbudnicy narasta szybko z bardzo małym opóźnieniem, spowodowanym wyłącznie działaniem prądów wirowych obwodu magnetycznego wzbudnicy oraz podłużnym oddziaływaniem zezwojów komutujących, przy opóźnionej komutacji towarzyszącej nagłym wzrostom obciążenia wzbudnicy. W celu zmniejszenia opóźniającego działania prądów wirowych obecnie stosuje się stojany wzbudnic nowoczesnej konstrukcji, wykonane z pakietów blach twornikowych.



Rys. 18. Schemat wzbudzenia generatora ze wzbudnicą wyposażoną w dozwojenie i transformator wyrównawczy.

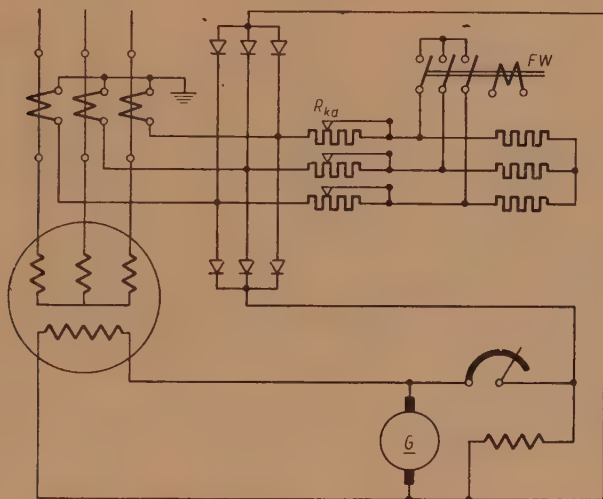
Korzystny wpływ na stromość napięcia wzbudnicy otrzymuje się również przez wprowadzenie tak zwanej kompowandacji wzbudzenia generatora. Kompowandacja wzbudzenia polega na zasilaniu uzwojenia wzbudzenia wzbudnicy generatora prądem wyprostowanym, zbieranym z przekładników prądowych stojana generatora (rys. 19).

Kompowandacja wzbudzenia generatora spełnia zadanie regulacji wzbudzenia utrzymując w przybliżeniu stałość napięcia na zaciskach generatora przy jego przejściu z biegu jałowego do pełnego obciążenia w stanie ustalonym. Jeżeli zachodzi konieczność dokładnego utrzymania stałości napięcia i zachowania określonego współczynnika statyki regulacji napięcia, kompowandacja wzbudzenia uzupełniona jest dodatkowym regulatorem, tak zwanym korektorem napięcia.

Przy zwarciowych załamaniach napięcia sieci zwarciový prąd przejściowy generatora z przekładników prądowych kompowandacji powiększa

udarowo napięcie na uzwojeniu wzbudzenia wzbudnicy i przyspiesza w ten sposób czas narastania napięcia wzbudnicy.

W celu powiększenia skuteczności kompoundacji przy zwarciowych obniżkach napięcia, urządzenie forsowania wzbudzenia można rozwiązać konstrukcyjnie w sposób podany na rys. 19. Stycznik forsowania wzbudzenia FW uruchomiony przez przełącznik podnapięciowy zwiększa opór kompoundacji R_{kd} i w ten sposób wzmacnia napięcie zasilania uzwojenia wzbudzenia wzbudnicy. Pomiary oscylograficzne wykazały, że przy takim



Rys. 19. Schemat wzbudzenia generatora wyposażonego w kompoundację wzbudzenia.

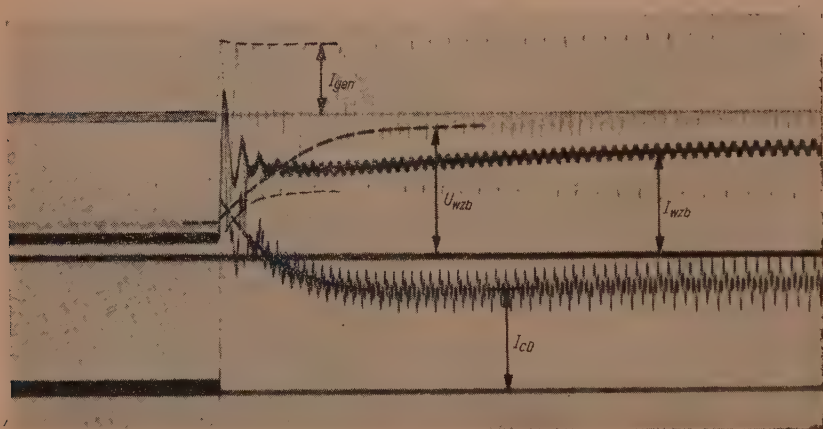
rozwiązaniu automatyki forsowania wzbudzenia otrzymuje się znacznie większą stromość napięcia wzbudzenia aniżeli to ma miejsce przy stycznikowym zwieraniu oporów dodatkowych w obwodzie wzbudzenia wzbudnicy (opornicy bocznikowej), jeżeli w obu przypadkach przyjmie się jednakową wartość ustalonego szczytowego napięcia wzbudnicy.

Dla ilustracji wpływu kompoundacji na szybkość narastania napięcia wzbudnicy na rysunku 20 przedstawiono oscylogram zwarcia generatora synchronicznego o parametrach $P=30$ kVA, $U=230$ V, $\cos \varphi=0,8$, $n=1500$ obr/min. Generator wyposażony w kompoundację wzbudzenia według rysunku 19.

Na skutek odpowiednio dobranego współczynnika forsowania ($k=2,5$) oraz małej bezwładności wzbudnicy, uzyskanej dzięki kompoundacji generatora, prąd wzbudzenia generatora I_{wzb} utrzymuje się na podniesionej o prąd wyrównawczy wartości występującej w pierwszej chwili zwarcia

(a nawet jeszcze powoli wzrasta). W prądzie wzbudzenia generatora widoczna jest zanikająca składowa zmienna, która pojawiła się w pierwszej chwili zwarcia. Ustalona składowa zmienna w prądzie wzbudzenia generatora powstaje od pulsacji prądu wzbudnicy zasilanej z układu prostowników suchych.

Prąd stojana generatora I_{gen} praktycznie utrzymuje się na wartości prądu przejściowego w pierwszej chwili zwarcia, co jest dowodem, że generator utrzymuje stałość napięcia E'_d . Dużą szybkość narastania napięcia wzbudnicy otrzymuje się dzięki znacznej zwwyżce prądu wzbudzenia



Rys. 20. Oscylogram przebiegów przy zwarcu generatora wyposażonego w kompondację wzbudzenia według rys. 19. Oznaczenia jak na rys. 9a.

wzbudnicy I_{CD} przy zwarcu generatora. Porównując otrzymany przebieg prądu wzbudzenia wzbudnicy I_{CD} z oscylogramem z rysunku 9a, widzimy zasadniczą przyczynę powiększenia stromości narastania napięcia wzbudnicy.

Przy użyciu nowoczesnych samoczynnych pospiesznych regulatorów napięcia, w skład których wchodzi wzmacniacze maszynowe lub magnetyczne o małych stałych czasowych, można również łatwo otrzymać znaczne powiększenie szybkości narastania napięcia wzbudnicy przy zwarciovych obniżkach napięcia sieci. Zwiększenie stromości napięcia wzbudnicy otrzymujemy kosztem powiększenia mocy wzmacniaczy zasilających uzwojenie wzbudzenia wzbudnicy. Przy znacznej obniżce napięcia regulator wysterowuje wzbudnicę do pułapu określonego nasyceniem obwodu magnetycznego wzbudnicy (jeżeli dobrano odpowiednio wysokie napięcie szczytowe wzmacniacza) i w swym działaniu zastępuje stycznikowy automat forsowania wzbudzenia.

Korzystne własności układu wzbudzenia można uzyskać przez połączenie nowoczesnego samoczynnego pospiesznego regulatora napięcia z compoundacją wzbudzenia generatora lub dozwojeniem szeregowym wzbudnicy.

Zakład Maszyn Elektrycznych
Politechnika Śląska

WYKAZ LITERATURY

1. Byrd H. L., Pritschard S. H.: *Solution of the two-machine stability problem*. Gen. Elect. Rev. T. 36, 1933, s. 81.
2. Goruszkin W., Korniejew L. I.: *Prediel dinamiczeskoj ustojczivosti gienieratora z regulatorom wozbuzhdenija*. Izv. Ak. Nauk ZSRR Odd. Techn. Nauk, 7/1951.
3. Kołek W., Kubek J., Paszek W.: *Samosynchronizacja generatorów synchronicznych*. Praca Katedry Maszyn Elektrycznych Pol. Sl., styczeń 1954.
4. Kołek W., Paszek W.: *Równania wyjściowe dla analizy przebiegów w maszynie synchronicznej*. Zeszyty Naukowe Pol. Sl. Nr 3.
5. Maminkonianc L. G.: *O pierichodnych procesach w synchronnych maszynach z uspokoitielnymi konturami na rotore*. Elektrizestwo 7/54.
6. Nowacki P.: *Linie dalekosieżne*. Warszawa, PWT, 1954.
7. Paszek W.: *Praca maszyny synchronicznej przy stałym poślizgu*. Zeszyty Naukowe Pol. Sl. Elektryka Nr 3, 1954.
8. Wienikow W. A.: *Uproszczennyj rasczot dinamiczeskoj ustojczivosti elektriceskich sistem*. Elektrizestwo Nr 5, 1948.
9. Trofimienko D. E.: *Ob efektiwnosti jonnoho udarnogo wozbuzhdenija w powyżsenii dinamiczeskoj ustojczivosti dalnych elektropieriedaczi*. Elektrizestwo Nr 1, 1954.

В. ПАШЕК

ВЛИЯНИЕ ФОРСИРОВКИ ВОЗБУЖДЕНИЯ НА ПАРАЛЛЕЛЬНУЮ РАБОТУ ГЕНЕРАТОРОВ

Резюме

В системе передачи энергии представленной на рис. 1 предположено, что в точке А происходит симметричное короткое замыкание через реактивное сопротивление X_k . Вследствие уменьшения электрической энергии передаваемой сети при неизменённой мощности турбины — ротор генератора ускоряет и увеличивает угол мощности ϑ . В результате переходного процесса ротор может установить свою новую точку равновесия, достигаемую в принципе путём затухающих колебаний.

Падение напряжения при коротком замыкании сопровождается в контурах ротора уравнительными токами, сохраняющими в первый момент неизменённое потокоцепление контуров ротора.

Уравнительный ток ротора разлагается во время переходного процесса на параллельные ветви контуров ротора, представленных на замещающей схеме

(рис. 2а и 2б) приблизительно пропорционально постоянному времени: контура возбуждения генератора, контура успокоительной обмотки ротора, а также эквивалентного контура массивного блока ротора которые являются составляющими полной постоянной времени генератора T'_{d0} . Общий уравнильный ток может быть представлен в виде уравнильного тока, приведенного к контуру возбуждения (уравн. 5).

Этот ток затухает с постоянной времени T'_d (уравн. 4). Если генератор, работающий без автоматической регулировки напряжения, снабжён автоматом форсировки возбуждения, тогда на уравнильный ток налагается дополнительный ток форсировки, вынуждённый увеличенным напряжением возбудителя. При соответственно большом коэффициенте форсировки внутреннее напряжение генератора (в воздушном зазоре) может оставаться неизменённым и даже, в некоторых случаях, возрасти, если применённый коэффициент форсировки будет значителен, или если короткое замыкание будет иметь место за значительным реактивным сопротивлением. Из рассмотрения влияния форсировки на мощность при пределе статической устойчивости передачи энергии (уравн. 6) следует, что форсировка возбуждения заметно увеличивает эту мощность (рис. 10). Однако в нестационарном процессе влияние форсировки значительно уменьшается вследствие магнитной инерции генератора. Пренебрегая электромагнитной инерцией по поперечной оси генератора можно выразить электрическую мощность передаваемую сети уравнением (7), а уравнение переходных процессов генератора уравнением (8), или соответственно — после преобразования — уравнениями (9) и (10). Движение ротора под влиянием избытка мощности турбины свыше мощности, передаваемой в сеть определяет уравнение (12). В выражении электрической мощности генератора пренебрежено: влияние потерь в контурах ротора при несимметричных коротких замыканиях и влияние асинхронного демпферного момента, возникающего при скольжении ротора относительно поля статора.

Так как сохранение устойчивости параллельной работы обусловлено первым полупериодом колебания, то влияние форсировки возбуждения уменьшается прежде всего вследствие значительной величины постоянной времени генератора, замедляющей возрастание возбуждающего тока, а следовательно вследствие внутреннего напряжения генератора. По мере возрастания напряжения E'_d увеличивается угловая характеристика, а следовательно уменьшается максимальный угол мощности ϑ_{\max} определяемый равенством поверхности (уравнение 11).

С другой стороны форсировка возбуждения оказывает в известной степени нежелательное влияние на увеличение второй амплитуды колебания во время возвращения ротора из максимального угла отклонения. Вследствие сильного демпфирования колебаний, благодаря значительному асинхронному моменту, появляющемуся уже при небольшом скольжении, процесс колебания имеет практически всегда затухающий характер.

Для простейшего случая параллельной работы двух синхронных машин, т.е. генератора и синхронного двигателя, соединённых через реактивное сопротивление X_c пренебрегая второй составляющей мощности в уравнении (7), можно определить дифференциальное уравнение движения обеих синхронных машин (14), на основании которого легко свести систему к работе эквивалентного генератора на эквивалентную сеть бесконечной мощности (13), если мы введём эквивалентную мощность турбины P'_t (16) и эквивалентную переменную времени τ (17). На рис. 14 показано семейство кривых зависимости угла мощности как функцию переменной τ для различных мощностей турбины P'_t .

Анализ движения системы в нестационарном процессе весьма сложен и требует применения приближённых методов интегрирования. Для определения количественного влияния форсировки возбуждения на сохранение динамического равновесия генератора, можно за исходную точку принять экспериментально подтверждённое приближение (12) для движения системы при нагрузке предельной динамической мощностью. Согласно этому предельная динамическая мощность системы увеличивается вследствие регулировки напряжения возбудителя в зависимости от величины интеграла $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}=\vartheta_g} U_w d\vartheta$ и независимо от характера временной функции кривой напряжения возбудителя.

Принимая по диаграмме 14а изменение угла мощности в течение первого полупериода колебания (18) для нагрузки системы мощностью при пределе динамической устойчивости предположен эквивалентный характер изменения наяржения возбудителя (19) и из эквивалентности интеграла $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}=\vartheta_g} U_w d\vartheta$ определяем функцию напряжения возбудителя

$$\Delta U_w = \frac{4}{\pi} (U_{w\max} - U_{wp}) \sin\left(\frac{\pi}{t_g} t\right)$$

После подстановки эквивалентного напряжения возбудителя в уравнение (10) получается (10b) для определения влияния форсировки возбуждения на процесс наяржения E'_d а вследствие этого и на мощность на пределе динамической устойчивости передачи энергии, рассмотрим зависимость приращения $\Delta E'_d$ сверх значения E'_d возникающего в генераторе без регулировки возбуждения во время работы вблизи предела динамической устойчивости.

Решение дифференциального уравнения (20) даёт уравн. (21), которое может быть представлено приближённой формулой (22). Из сравнения (22) и (18) получается (23). Полученный результат позволяет нам аналитически оценить влияние форсировки возбуждения на увеличение предельной динамической мощности на величину ΔP , по сравнению с предельной мощностью P_{d0} без регулировки возбуждения.

Увеличение E'_d из-за форсировки отражается только на первой составляющей мощности передаваемой энергии в уравн. (7). На основании зависимости (24) —

после подстановки $\Delta P = \frac{E'_d U_1}{X'_d + X_{z1}} \sin \vartheta$ получается уравн. (25). Первое слагаемое

формулы (25) приблизительно равно нулю, и следовательно увеличение предельной динамической мощности ΔP мы выразим уравн. (25) или приближённом уравн. (27).

Принимая практические значения параметров системы передачи энергии получается (уравн. 27), что увеличение предельной мощности составляет не более 10% при коэффициенте форсировки $k_f=2$. Из вышеуказанных соображений следует, что вопреки часто выражаемому мнению, при принятом допуске-ом коэффициенте форсировки $k_f=2$ форсировки возбуждения генераторов не влияет значительно на сохранение параллельной работы в нестационарном процессе первого колебания, практически обуславливающего сохранение параллельной работы. Принципиальные ценные преимущества форсировки возбуждения находятся, не в направлении повышения динамической устойчивости.

Из-за пренебрежения нами раньше электромагнитной инерции возбудителя — действительное влияние форсировки возбуждения еще меньше. Однако, так как кривая возрастания угла мощности $\vartheta = f(t)$ (см. рис. 14) вблизи первоначального угла мощности имеет сравнительно плоскую форму, то влияние магнитной инерции возбудителя обнаруживается только при значительных постоянных времени возбудителя.

Практически на сохранение параллельной работы в момент переходного процесса решающее влияние имеет компенсирующий дополнительный ток ротора, поддерживающий неизменённое значение потока в воздушном зазоре генератора в первый момент колебания.

Принимая значительно больший коэффициент форсировки, порядка 4, что иногда применяется в иностранных электростанциях можно существенно увеличить влияние форсировки возбуждения на предел динамической устойчивости генераторов. Для термической прочности возбудителя и ротора генератора рекомендуется ввести на приспособленных к этой цели возбудителях двустепенную систему форсировки возбуждения, дающую высокий потолок напряжения возбудителя с короткой продолжительностью, порядка 1 секунды, и нормальную, более продолжительную степень форсировки с ограниченным коэффициентом форсировки до порядка $k_f=2$. Ограниченная продолжительность первой степени полезна кроме того ввиду желательного снижения амплитуд колебаний системы после первого отклонения ротора.

С целью увеличения скорости возрастания напряжения возбудителя при понижении напряжения сети вследствие короткого замыкания в системе можно снабдить возбудители сильными дополнительными последовательными обмотками возбуждения, дающими согласованное намагничивание (рис. 19), или же системой компаундирования возбуждения (рис. 20).

Применяя современные автоматические регуляторы напряжения, в состав которых входят магнитные или электромагнитные усилители с малыми постоянными времени, можно также легко получить значительное увеличение скорости возрастания напряжения возбудителя при понижениях напряжения сети.

W. PASZEK

EINFLUSS DER STOSSERREGUNG AUF DEN PARALLEL BETRIEB VON SYNCHROGENERATOREN

Zusammenfassung

Im einfachen auf dem Bild 1 dargestellten Übertragungssystem wird im Punkte A ein symmetrischer Kurzschluss über die Kurzschlussreaktanz X_k angenommen. Beim Kurzschluss sinkt die ins Netz abgegebene elektrische Leistung, wobei bei unveränderter Turbinenleistung der Generatorläufer beschleunigt und der Leistungswinkel ϑ vergrößert wird. Infolge der nichtstationären Vorgänge kann der Läufer einen neuen Gleichgewichtspunkt prinzipiell auf dem Wege einer gedämpften Schwingung erreichen.

Bei plötzlicher Spannungsabsenkung treten in den Läuferstromkreisen Ausgleichsdurchflutungen auf, welche die im Kurzschlussmoment vorhandenen magnetischen Flussverkettungen zu erhalten suchen.

Die Ausgleichsdurchflutung zerlegt sich während des transienten Ausgleichsvorganges der Synchronmaschine auf die im Bild 2a und 2b dargestellten parallelschalteten Stromzweige annähernd proportional zum Anteil der bezüglichen Zeitkonstante der Erregerwicklung, der Dämpferwicklung und des Ersatzstromkreises des massiven Läufer Eisens in der gesamten Zeitkonstante T'_{do} der Synchronmaschine.

Die Ausgleichsdurchflutung kann man als einen äquivalenten Ausgleichstrom der Erregerwicklung darstellen (Gleichung 5) der mit der Zeitkonstante T'_d (Gleichung 4) abklingt.

Wenn angenommen wird, dass der Synchrongenerator ohne automatische Spannungsregelung arbeitet, jedoch mit einer Storerregungsvorrichtung versehen ist, dann überlagert sich die von der erhöhten Erregungsspannung erzwungene zusätzliche Stosserregungsdurchflutung auf die Kurzschlussdurchflutung. Bei einem entsprechend hohen Stosserregungskoeffizienten kann die innere Generatorluftspaltspannung unverändert bleiben und sogar in gewissen Fällen ansteigen, wenn ein hoher Stosserregungskoeffizient angenommen wird. Aus der analytischen Betrachtung der Stosserregungsauswirkung auf statische Grenzübertragungsleistung ergibt sich eine starke Erhöhung der statischen Grenzleistung. Im transienten Ausgleichzustand tritt der Einfluss der Stosserregung infolge der elektromagnetischen Trägheit in der Läuferlängsachse und infolge der Auswirkung der Ausgleichsdurchflutung prozentual merkbar zurück. Bei Vernachlässigung der elektromagnetischen Trägheit in der Läuferquerachse stellt Gleichung 7 die ins Netz übertragene elektrische Generatorleistung dar, während Gleichung 8 und nach Einsetzen von vorigen Beziehungen, Gleichung 9 und 10 die transiente elektromagnetische Zustandsgleichung der Synchronmaschine darstellt.

Der mechanische Ausgleichszustand des Läufers, der unter der Einwirkung der Differenz der Turbinenleistung und elektrischen Übertragungsleistung beschleunigt wird, ist durch Gleichung 12 beschrieben worden. Bei Berechnung der elektrischen Leistung vernachlässigt man den Einfluss der Ständerverluste und die Läuferverluste, die bei unsymmetrischen Kurzschlüssen auftreten, sowohl wie den Einfluss des asynchronen Dämpfungsmomentes beim Schlüpfen des Läufers gegenüber dem Ständerdrehfeld.

Da für die Aufrechterhaltung des Parallelbetriebes die erste Schwingungshalbperiode massgebend ist, wird die Wirkung der Stosserregung, besonders wegen verhältnismässig grosser Generatorzeitkonstante, die das Anwachsen des zusätzlichen Erregerstromes verkleinert, stark beeinträchtigt. Ein Anwachsen der Spannung E'_d bewirkt eine Vergrösserung der Leistung-Leistungswinkel-Charakteristik und dementsprechend eine Abnahme des maximalen Leistungswinkels ϑ_{max} , dessen Wert von der Flächengleichung 11 bestimmt wird. Andererseits bewirkt die Stosserregung eine nichterwünschte Vergrösserung der zweiten Leistungswinkelschwingungsamplitude nach dem Rücklauf des Läufers vom ersten Leistungswinkelhöchstwert.

Für den einfachsten Fall von Parallelbetrieb zweier Synchronmaschinen (der Synchrongenerator speist den Synchronmotor über die Reaktanz X_z), kann man bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes in Gleichung 7 das mechanisch-elektromagnetische-Differenzialgleichungssystem stark vereinfachen (Gleichung 14) und es auf den Parallelbetriebsfall eines Ersatzgenerators mit starrem Netz zurückführen. Man führt dabei eine Ersatzturbinenleistung P' und die äquivalente Zeitveränderliche τ ein. Bild 14 zeigt eine Schar von Leistungswinkelkurven als Funktion von τ für verschiedene Turbinenleistungen P' . Eine eingehende Analyse der mechanischen und elektromagnetischen Ausgleichvorgänge im vorliegenden Übertragungssystem

ist sehr kompliziert und erfordert zur Lösung des Integrals der Differenzialgleichung die Zuhilfenahme von Näherungsverfahren. Zur quantitativen Untersuchung der Stosserregungswirkung auf dynamische Stabilität geht man von einer experimentell erwiesenen Beziehung aus, nach der bei der dynamischen Stabilitätsgrenze die Er-

höhung der Grenzleistung vom Integral $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}=\vartheta_g} U_w d\vartheta$ abhängt, während dieselbe vom

zeitlichen Verlauf der Erregerspannungskurve praktisch unabhängig ist. An Hand der im Bild 14 dargestellten Charakteristikenschar kann man den zeitlichen Leistungswinkelverlauf bei dynamischer Grenzleistung P_{d_0} erhalten. Man nimmt einen ähnlichen Verlauf der Erregerspannung an (Gleichung 19) und aus dem äquivalenten

Integralwert $\int_{\vartheta_0}^{\vartheta_{\max}=\vartheta_0} U_w d\vartheta$ ergibt sich die Erregerspannungsfunktion. Nach Einsetzen dieser Funktion in Gleichung 10 erhält man Gleichung 10b.

Wenn man nur den Einfluss der Stosserregung auf Erhöhung der Grenzleistung untersucht, genügt es nur den Verlauf des Spannungszuwachs $E' \Delta_d$ über die Werte von E'_d im Generator, der ohne Spannungsregler und Stosserregung an der Grenze der dynamischen Stabilität arbeitet, zu berechnen. Die Auflösung der Differentialgleichung 20 ergibt Gleichung 21, die man mit Gleichung 22 annähert.

Vom Vergleichen der Formel 22 mit 18 ergibt sich die Gleichung 23. Das Ergebnis erlaubt auf die Erhöhung der dynamischen Grenzleistung um ΔP_i gegenüber der Grenzleistung P_{d_0} ohne Erregerspannungsänderung zu schliessen. Die Vergrößerung der Erregerspannung P_d infolge der Stosserregung wirkt sich nur im ersten Glied der Übertragungsleistung (Gleichung 7) aus. Das erste Glied in Gleichung 25 ist angenähert gleich Null, demzufolge wird die Erhöhung der Grenzleistung durch die Gleichung 26 beziehungsweise durch ihre Näherung 27 beschrieben.

Wenn man die praktischen Parameterwerte des im Bild 1 dargestellten einfachen Übertragungssystems in die Gleichung 27 einsetzt, so erhält man bei einem angenommenen Stosserregungskoeffizienten $k_f=2$ eine Erhöhung der Grenzleistung um kaum 10%. Wie sich aus dieser Betrachtung ergibt, spielt die Stosserregung (bei zulässigen Werten des Stosserregungskoeffizienten $k_f=2$) in der Aufrechterhaltung der Parallelarbeit (während der ersten Schwingungsperiode) trotz der oft geäußerten Meinung keine massgebende Rolle. Auch nicht hier liegen prinzipiell die Vorteile der Stosserregung. Infolge der zuvor vernachlässigten elektromagnetischen Verzögerung der Erregermaschine ist die Wirkung noch kleiner. Da jedoch die Leistungswinkelkurve in der Nähe des Anfangswinkels nur flach ansteigt (vergleiche Bild 14) ist der tatsächliche Einfluss der Erregermaschinen-Zeitkonstante nicht sehr merkbar.

Praktisch ist die Ausgleichsdurchflutung, die die magnetische Verkettung der Läuferstromkreise im ersten Kurzschlussmoment aufrechterhält und das starke asynchrone Drehmoment beim Schlüpfen des Läufers für die Erhaltung der Parallelarbeit massgebend. Bei grösseren Stosserregungskoeffizienten z. B. 4, die man oft im Ausland annimmt, fängt die Stosserregung für die dynamische Grenzleistung eine vielmehr ausschlaggebende Rolle zu spielen. Um die Erregerwicklung und die Erregermaschine nicht zu hoch thermisch zu beanspruchen, empfiehlt sich eine zweistufige Stosserregung anzuwenden, bei der anfänglich eine möglichst hohe Erregerspannung kurzzeitig wirkt (Zeitdauer ca. 1 sek.) die dann bis zum längerzulässigen Werte, entsprechend dem üblichen Koeffizient $k_f=2$, absinkt.

Eine begrenzte Zeitdauer der hohen Erregerspannung ist ausserdem für die erwünschte Herabsetzung der der ersten Halbschwingung folgenden Leistungswinkelschwingungsamplituden günstig.

621.3.025.3

A. PRZYŁUSKI

Przekształcenia liniowe symetrycznych obwodów trójfazowych eliminujące oporności wzajemne

Rękopis dostarczono 18. 8. 1955

W obliczeniach trójfazowych sieci elektrycznych stosowane są różne składowe prądów i napięć, przy czym na pierwszym miejscu należy tu wymienić składowe symetryczne. Opierają się one na przekształceniu liniowym napięć i prądów. Zasadniczą cechą stosowanych przekształceń, ułatwiającą obliczenia i analizę obwodu, jest eliminacja oporności wzajemnych pomiędzy fazami obwodu trójfazowego. W artykule wykazano, że dla symetrycznej sieci trójfazowej w przypadku ogólnym ($Z_{11} \neq Z_{22}$), istnieje w zasadzie jedno przekształcenie — składowe symetryczne — eliminujące oporności wzajemne. Wykazano również, że w sieciach, w których dla każdego elementu oporność dla składowej zgodnej (Z_{11}), jest równa oporności dla składowej przeciwnej (Z_{22}) istnieje nieskończenie wiele przekształceń eliminujących oporności wzajemne. Podano ogólną postać takiego przekształcenia.

1. WSTĘP

Analiza zjawisk w liniowych obwodach trójfazowych sprowadza się do rozpatrywania układu równań liniowych. Operowanie prądami i napięciami fazowymi, skojarzeniami magnetycznymi uzwojeń fazowych itp. często nie uwypukla w sposób bezpośredni istotnych cech rozpatrywanego zjawiska. Dlatego w szeregu przypadków korzysta się z przekształceń liniowych. Wystarczy tu wspomnieć o składowych symetrycznych, o zmodyfikowanych składowych symetrycznych Clarke, o przekształceniu Parka-Goriewa oraz innych, aby podkreślić rolę przekształceń liniowych w obliczeniach obwodów trójfazowych.

W pracy niniejszej naświetlono zagadnienie stosowania przekształceń liniowych w obliczeniach symetrycznych obwodów trójfazowych, których symetria nie wyklucza oczywiście występowania niesymetrycznych układów prądów i napięć. Cel pracy zostanie podany i dokładnie sprecyzowany w rozdziale następnym.

2. OMÓWIENIE ZAGADNIENIA

W obliczeniach trójfazowych obwodów elektrycznych zasadniczą rolę odgrywa zależność wyrażająca straty napięcia w poszczególnych fazach elementu trójfazowego w funkcji prądów fazowych. Zależność taką w formie macierzowej można uważać za uogólnienie prawa Ohma dla przypadku obwodu trójfazowego. Mamy bowiem

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I}, \quad (1)$$

gdzie

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ba} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ca} & Z_{cb} & Z_{cc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}. \quad (2)$$

W wyrażeniach (2) napięcia, prądy i oporności są przedstawione w postaci liczb zespolonych. Oporności Z_{aa} , Z_{bb} , Z_{cc} występujące na przekątnej głównej macierzy \mathbf{Z} są to odpowiednio oporności własne faz a , b i c . Oporności występujące poza przekątną główną są to oporności wzajemne między poszczególnymi fazami: Z_{ab} , Z_{ac} , Z_{ba} itd. Równanie (1) stanowi punkt wyjściowy rozważań przeprowadzonych w niniejszej pracy.

Obliczanie trójfazowych obwodów elektrycznych, złożonych z licznych elementów, w oparciu o równanie (1) napotyka na poważne trudności. Trudności te spowodowane są przede wszystkim występowaniem oporności wzajemnych pomiędzy fazami elementu trójfazowego.

W związku z powyższym powstaje pytanie, czy nie uda się zastosować takiego przekształcenia obwodu trójfazowego, prowadzącego do przekształcenia prądów, napięć i oporności, aby wyeliminować oporności wzajemne. Dla symetrycznego obwodu trójfazowego przekształcenie takie istnieje i prowadzi do składowych symetrycznych. Czy jest to jedyne przekształcenie, którego zastosowanie do symetrycznego obwodu trójfazowego eliminuje oporności wzajemne każdego elementu obwodu? Odpowiedź na to pytanie jest celem niniejszej pracy.

Do równania (1) zastosujemy przekształcenie liniowe według znanego następującego schematu [5]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{Z}\mathbf{I}, \\ \mathbf{AU} &= \mathbf{AZB}^{-1}\mathbf{BI}, \\ \mathbf{U}_p &= \mathbf{Z}_p\mathbf{I}_p, \end{aligned} \quad (3)$$

macierze ze znacznikiem p oznaczają tu macierze przekształconych napięć, prądów i oporności i są związane z odpowiednimi macierzami obwodu trójfazowego zależnościami

$$\mathbf{U}_p = \mathbf{A}\mathbf{U}, \quad (4)$$

$$\mathbf{I}_p = \mathbf{B}\mathbf{I}, \quad (5)$$

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{A}\mathbf{Z}\mathbf{B}^{-1}. \quad (6)$$

Zakładamy, że macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} są to *nieosobliwe* kwadratowe macierze trzeciego stopnia, których elementy są niezależne od parametrów przekształcanego symetrycznego obwodu trójfazowego. Przekształcenia odwrotne do przekształceń (4, 5, 6) mają postać

$$\mathbf{U} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}_p,$$

$$\mathbf{I} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{I}_p,$$

$$\mathbf{Z} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Z}_p\mathbf{B}.$$

Celem rozważań jest dobranie macierzy przekształcenia \mathbf{A} i \mathbf{B} w taki sposób, aby macierz \mathbf{Z}_p danego elementu obwodu była diagonalna. Równanie (3) ma wtedy postać

$$\begin{bmatrix} U_k \\ U_l \\ U_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_k & 0 & 0 \\ 0 & Z_l & 0 \\ 0 & 0 & Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_k \\ I_l \\ I_m \end{bmatrix}$$

i sprowadza się, jak widać, do trzech prostych zależności algebraicznych.

$$U_i = Z_i I_i \quad (i=k, l, m).$$

Wynikające stąd korzyści obliczeniowe są zupełnie oczywiste. Jeżeli korzyści te mają być zapewnione również przy obliczeniach obwodu trójfazowego, to macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} muszą być tak dobrane, aby diagonalizowały macierze opornościowe \mathbf{Z} wszystkich elementów obwodu. W ten sposób obwód trójfazowy zostaje zastąpiony trzema zupełnie niezależnymi obwodami. W przypadku obwodu niesymetrycznego, gdy macierze \mathbf{Z} poszczególnych elementów obwodu nie mają pewnych charakterystycznych własności będzie to na ogół niemożliwe. Jeśli macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} będą diagonalizowały macierze \mathbf{Z} niektórych elementów, to nie będą one na ogół diagonalizowały macierzy opornościowych innych elementów. Tak więc w obwodzie niesymetrycznym nie uda się w ogólnym przypadku dobrać takiego przekształcenia, aby w układzie przekształconym uniknąć występowania oporności wzajemnych. Sieci trójfazowe spotykane w praktyce są z reguły sieciami symetrycznymi, utworzonymi z trójfazowych elementów symetrycznych. Macierz opornościowa \mathbf{Z} trójfazowego elementu symetrycznego ma pewną charakterystyczną budowę. Inaczej mówiąc, elementy macierzy \mathbf{Z} spełniają pewne warunki. Pozwala to dobrać macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} tak, że będą one diagonalizowały macierze *w s z y s t k i c h* symetrycznych elementów sieci trójfazowej.

Symetryczny statyczny element trójfazowy ma macierz opornościową o postaci

$$\mathbf{Z}_{es} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Symetryczna maszyna obrotowa ma macierz opornościową [4, 5] o postaci

$$\mathbf{Z}_{em} = \begin{bmatrix} Z_s & Z_{m1} & Z_{m2} \\ Z_{m2} & Z_s & Z_{m1} \\ Z_{m1} & Z_{m2} & Z_s \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Ponieważ macierz (7) można traktować jako szczególny przypadek macierzy (8), gdy $\hat{Z}_{m1} = \hat{Z}_{m2} = \hat{Z}_m$, przeto przekształcenie diagonalizujące macierze typu (8) będzie oczywiście diagonalizowało macierze typu (7). Można się oczywiście spodziewać, że będą ponadto istniały przekształcenia diagonalizujące macierze typu (7), a niediagonalizujące macierzy typu (8).

3. KILKA UWAG MATEMATYCZNYCH

Dalsze rozważania dotyczące zagadnienia jednoczesnej diagonalizacji macierzy opornościowych symetrycznych elementów obwodu trójfazowego będą się opierały na pewnych znanych własnościach przekształcenia (3). Własności te, na które autor będzie się powoływał w dalszej części pracy zostaną poniżej ujęte w postaci twierdzeń i wniosków.

Macierz \mathbf{K} o postaci

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

spełnia następujące zależności

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{E}$$

oraz

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}^{-2},$$

$$\mathbf{K}^2 = \mathbf{K}^{-1},$$

$$\mathbf{K}^3 = \mathbf{K}^{-3} = \mathbf{E},$$

gdzie \mathbf{E} jest macierzą jednostkową.

Mnożąc lewostronnie daną macierz przez K otrzymujemy macierz o wierszach przesuniętych cyklicznie o jedno miejsce do dołu. Pomnożenie lewostronnie macierzy przez K^2 przesuwają wiersze cyklicznie o dwa miejsca do dołu. Pomnożenie prawostronnie danej macierzy przez macierz K przesuwa cyklicznie kolumny macierzy o dwa miejsca w prawo. Pomnożenie prawostronnie przez K^2 przesuwa cyklicznie kolumny macierzy o jedno miejsce w prawo. Z powyższego wynika, że przez mnożenie

$$KAK^2$$

otrzymamy macierz, której elementy przesunięte są cyklicznie o jedno miejsce w prawo i jedno miejsce do dołu. Podobnie mnożenie

$$K^2AK$$

przesuwają cyklicznie elementy macierzy A o dwa miejsca w prawo i dwa miejsca do dołu.

Z uwagi na charakterystyczną budowę macierzy (7) i (8) otrzymamy

$$\begin{aligned} Z_{es} &= KZ_{es}K^2 = K^2Z_{es}K, \\ Z_{em} &= KZ_{em}K^2 = K^2Z_{em}K. \end{aligned} \quad (10)$$

Jeśli macierz Z_p jest diagonalna, to również diagonalne są macierze

$$\begin{aligned} KZ_pK^2, \\ K^2Z_pK. \end{aligned} \quad (11)$$

Twierdzenie 1.

Jeśli macierz

$$Z_p = AZB^{-1}$$

jest diagonalna, to są również diagonalne macierze

$$Z'_p = CZD^{-1} \text{ i } Z''_p = FZG^{-1},$$

gdzie

$$C = KA, \quad F = K^2A,$$

$$D = KB, \quad G = K^2B,$$

bowiem

$$Z'_p = KAZ(KB)^{-1} = KAZB^{-1}K^{-1} = KZ_pK^2,$$

$$Z''_p = K^2AZ(K^2B)^{-1} = K^2AZB^{-1}(K^2)^{-1} = K^2Z_pK$$

są macierzami diagonalnymi zgodnie z (11).

Twierdzenie 2.

Jeśli macierz

$$Z_p = AZB^{-1}$$

jest diagonalna, i jeśli

$$C\lambda = A, \quad D = \varepsilon B,$$

gdzie λ i ε są nieosobliwymi macierzami diagonalnymi, to diagonalna jest również macierz

$$Z'_p = CZD^{-1},$$

mamy bowiem

$$Z'_p = CZD^{-1} = (\lambda A) Z (\varepsilon B)^{-1} = \lambda (AZB^{-1}) \varepsilon^{-1} = \lambda Z_p \varepsilon^{-1}.$$

Twierdzenie 3.

Jeśli macierz

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{B}^{-1}$$

jest diagonalna, to również są diagonalne macierze

$$\mathbf{Z}'_p = \mathbf{C} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{D}^{-1} \text{ i } \mathbf{Z}''_p = \mathbf{F} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{G}^{-1}$$

jeżeli

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{K}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} \mathbf{K}^2,$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{B} \mathbf{K}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{B} \mathbf{K}^2.$$

Wynika to bezpośrednio z równości (10), a mianowicie

$$\mathbf{Z}'_p = \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{Z}_{em} (\mathbf{B} \mathbf{K})^{-1} = \mathbf{A} (\mathbf{K} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{K}^2) \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{Z}_p,$$

$$\mathbf{Z}''_p = \mathbf{A} \mathbf{K}^2 \mathbf{Z}_{em} (\mathbf{B} \mathbf{K}^2)^{-1} = \mathbf{A} (\mathbf{K}^2 \mathbf{Z}_{em} \mathbf{K}) \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{Z}_p.$$

Twierdzenie 4.

Jeśli macierze nieosobliwe \mathbf{A} i \mathbf{B} są tak dobrane, że macierz

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{B}^{-1}$$

jest diagonalna dla wszelkich $\mathbf{Z}_s, \mathbf{Z}_{m1}$ i \mathbf{Z}_{m2} , to $\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B}$, gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest macierzą diagonalną, oraz macierz

$$\mathbf{Z}'_p = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{A}^{-1}$$

jest diagonalna dla wszelkich wartości $\mathbf{Z}_s, \mathbf{Z}_{m1}$ i \mathbf{Z}_{m2} .

Z założenia \mathbf{Z}_p jest macierzą diagonalną dla wszelkich wartości $\mathbf{Z}_s, \mathbf{Z}_{m1}$ i \mathbf{Z}_{m2} elementów macierzy \mathbf{Z}_{em} , a więc również dla wartości $\mathbf{Z}_s = 1, \mathbf{Z}_{m1} = \mathbf{Z}_{m2} = 0$. Stąd

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{B}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} = \boldsymbol{\lambda},$$

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\lambda} \mathbf{B}.$$

Wobec powyższej zależności istniejącej pomiędzy macierzami \mathbf{B} i \mathbf{A} zgodnie z twierdzeniem 2 macierz

$$\mathbf{Z}'_p = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{A}^{-1}$$

jest macierzą diagonalną dla wszelkich wartości $\mathbf{Z}_s, \mathbf{Z}_{m1}$ i \mathbf{Z}_{m2} . Twierdzenia 3 i 4 są słuszne oczywiście i dla macierzy \mathbf{Z}_{es} , która jest szczególnym przypadkiem macierzy \mathbf{Z}_{em} [porównaj (7) i (8)].

Twierdzenie 5.

Macierze \mathbf{Z} i $\mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{A}^{-1}$, gdzie $|\mathbf{A}| \neq 0$, mają ten sam wielomian charakterystyczny¹, bowiem

$$\omega(\lambda) = |\mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{A}^{-1} - \lambda \mathbf{E}| = |\mathbf{A} (\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{A}^{-1}| =$$

$$= |\mathbf{A}| |\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{E}| |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{E}|,$$

¹ Wielomianem charakterystycznym macierzy kwadratowej \mathbf{Z} nazywamy wyrażenie

$$\omega(\lambda) = |\mathbf{Z} - \lambda \mathbf{E}|.$$

Pierwiastki wielomianu charakterystycznego nazywają się pierwiastkami charakterystycznymi macierzy \mathbf{Z} .

gdyż jak wiadomo

$$|\mathbf{A}| |\mathbf{A}^{-1}| = 1.$$

Wniosek 1.

Macierz \mathbf{Z} i \mathbf{AZA}^{-1} mają takie same pierwiastki charakterystyczne.

Wniosek 2.

Pierwiastkami charakterystycznymi macierzy diagonalnej

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

są λ_1 , λ_2 i λ_3 , bowiem

$$\omega(\lambda) = |\boldsymbol{\lambda} - \lambda \mathbf{E}| = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda).$$

Wniosek 3.

Jeśli macierz

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{AZA}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_k & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_l & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{Z}_m \end{bmatrix},$$

to pierwiastki charakterystyczne (\mathbf{Z}_k , \mathbf{Z}_l , \mathbf{Z}_m) macierzy \mathbf{Z} są elementami przekątnej głównej macierzy \mathbf{Z}_p .

4. PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE W TRÓJFAZOWYM OBWODZIE SYMETRYCZNYM

Z rozważań rozdziału 2 wynika, że poszukujemy takich przekształceń liniowych napięć i prądów, których zastosowanie dla dowolnego, ale symetrycznego obwodu trójfazowego eliminuje jednocześnie oporności wzajemne wszystkich elementów tego obwodu. Inaczej mówiąc, należy wyznaczyć takie macierze \mathbf{A} i \mathbf{B} , aby macierz opornościowa dowolnego symetrycznego elementu trójfazowego stała się po przekształceniu macierzą diagonalną. Macierz

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{AZ}_{em}\mathbf{B}^{-1} \quad (12)$$

ma być więc macierzą diagonalną dla dowolnych wartości \mathbf{Z}_s , \mathbf{Z}_{m1} i \mathbf{Z}_{m2} , będących elementami macierzy \mathbf{Z}_{em} . Jeśli warunki te będą spełnione, to również macierze

$$\mathbf{AZ}_{es}\mathbf{B}^{-1}$$

będą diagonalne, bowiem macierze typu \mathbf{Z}_{es} są szczególnym przypadkiem macierzy \mathbf{Z}_{em} ($\mathbf{Z}_{m1} = \mathbf{Z}_{m2} = \mathbf{Z}_m$).

Założmy, że macierze \mathbf{P} i \mathbf{Q} spełniają żądane warunki, czyli macierz

$$\mathbf{PZ}_{em}\mathbf{Q}^{-1}$$

jest macierzą diagonalną dla wszelkich wartości \mathbf{Z}_s , \mathbf{Z}_{m1} i \mathbf{Z}_{m2} , elementów macierzy \mathbf{Z}_{em} . Z twierdzenia 4 wynika, że macierz $\mathbf{PZ}_{em}\mathbf{P}^{-1}$ jest macierzą diagonalną oraz że $\mathbf{Q} = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{P}$, gdzie $\boldsymbol{\lambda}$ jest nieosobliwą macierzą

diagonalną. Z pozostałych twierdzeń podanych w rozdziale 3 wynika, że istnieje nieskończony zbiór par macierzy **A** i **B** określonych zależnościami

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \lambda \mathbf{K}^n \mathbf{P} \mathbf{K}^m \\ \mathbf{B} &= \varepsilon \mathbf{K}^n \mathbf{P} \mathbf{K}^m \end{aligned} \quad \begin{cases} n=1; 2; 3 \\ m=1; 2; 3 \end{cases} \quad (13)$$

mających takie same własności diagonalizacyjne jak macierze **P** i **Q**. Macierze λ i ε są dowolnymi nieosobliwymi macierzami diagonalnymi, a macierz **K** jest określona wyrażeniem (9).

Tak więc, jeśli dokonamy przekształceń liniowych za pomocą macierzy **A** i **B** określonych wyrażeniami (13), to macierz **Z_p** będzie diagonalna dla każdego symetrycznego elementu obwodu trójfazowego.

Okazuje się, że w przypadkach kiedy $Z_{11}=Z_{22}$ (patrz rozdział 5) zbiór (13) nie zawiera wszystkich macierzy mających wyżej zdefiniowane własności diagonalizacyjne, czyli istnieje wtedy macierz **P'** nie dająca się określić za pomocą wyrażeń (13) przez macierz **P**, a diagonalizująca macierze typu **Z_{es}** dla wszystkich **Z_s** i **Z_m**. Zgodnie z twierdzeniami rozdziału 3 istnieje wtedy również drugi zbiór nieskończony par macierzy **A'** i **B'** określony wyrażeniami typu (13) i macierzą **P'**.

Należy podkreślić, że każdy taki zbiór może być określony dowolną macierzą tego zbioru i wyrażeniami (13), bowiem pomiędzy dwiema dowolnymi macierzami tego zbioru **A₁** i **A₂** zachodzą związki (13). Jeśli przyjąć pewną macierz mającą zdefiniowane powyżej zdolności diagonalizacyjne i określić za pomocą tej macierzy i wyrażeń (13) dany zbiór, to nazwiemy tę macierz macierzą główną i oznaczymy symbolem **P**, a pozostałe elementy zbioru (13) — macierzami pochodnymi.

Zagadnienie poszukiwania macierzy diagonalizujących macierze typu **Z_{em}** lub **Z_{es}** sprowadza się do wyznaczania macierzy głównej lub macierzy głównych, bowiem może istnieć (w pewnych warunkach) szereg zbiorów par macierzy spełniających żądane warunki.

Przejdziemy teraz do wyznaczenia macierzy głównych.

Równanie $\mathbf{Z}_p = \mathbf{A} \mathbf{Z}_{em} \mathbf{A}^{-1}$ uwzględniając charakterystyczną budowę macierzy **Z_{em}** można napisać następująco:

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{A} \left(\mathbf{Z}_s \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{m1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \mathbf{Z}_{m2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \mathbf{A}^{-1}.$$

Wprowadzając oznaczenia (9) otrzymamy

$$\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}_s \mathbf{A} \mathbf{K}^3 \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{Z}_{m1} \mathbf{A} \mathbf{K}^2 \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{Z}_{m2} \mathbf{A} \mathbf{K} \mathbf{A}^{-1}.$$

Ażeby macierz Z_p była diagonalna dla wszelkich wartości Z_s , Z_{m_1} i Z_{m_2} , potrójne iloczyny macierzowe występujące w powyższym równaniu muszą być macierzami diagonalnymi. Stąd

$$\begin{aligned} \mathbf{AK}^3\mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{AK}^2\mathbf{A}^{-1} &= \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{AKA}^{-1} &= \boldsymbol{\varrho} = \begin{bmatrix} \varrho_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varrho_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varrho_3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Łatwo wykazać, że jeśli macierz \mathbf{A} zostanie tak dobrana, że macierz \mathbf{AKA}^{-1} będzie macierzą diagonalną $\boldsymbol{\varrho}$, to również macierz $\mathbf{AK}^2\mathbf{A}^{-1}$ będzie diagonalna. Mamy bowiem, mnożąc ostatnią równość (14) dwukrotnie przez siebie $\boldsymbol{\varrho}^2 = \boldsymbol{\mu}$.

Określimy teraz elementy ϱ_1, ϱ_2 i ϱ_3 macierzy $\boldsymbol{\varrho}$. Biorąc pod uwagę wielomian charakterystyczny macierzy \mathbf{K}

$$\omega(\varrho) = \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & 1 \\ 1 & -\varrho & 0 \\ 0 & 1 & -\varrho \end{vmatrix} = -\varrho^3 + 1$$

oraz wniosek 3 z rozdziału 3 otrzymamy

$$\varrho_1 = 1, \quad \varrho_2 = e^{j\frac{2}{3}\pi} = h, \quad \varrho_3 = e^{-j\frac{2}{3}\pi} = h^2. \quad (15)$$

Macierz $\boldsymbol{\varrho}$ została w ten sposób wyznaczona. Można teraz wyznaczyć również macierz \mathbf{A} . Na podstawie ostatniego z równań (14) i zależności (15) otrzymamy (a_{kl} — elementy macierzy \mathbf{A})

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Wykonując mnożenia macierzowe otrzymamy

$$\begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & a_{21} \\ a_{32} & a_{33} & a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h a_{21} & h a_{22} & h a_{23} \\ h^2 a_{31} & h^2 a_{32} & h^2 a_{33} \end{bmatrix}.$$

Z powyższej równości macierzowej wynika

$$a_{11} = a_{12} = a_{13} = a_1,$$

$$a_{21} = h^2 a_{22} = h a_{23} = a_2,$$

$$a_{31} = h a_{32} = h^2 a_{33} = a_3.$$

Poszukiwana macierz **A** ma więc następującą postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & a_1 \\ a_2 & h a_2 & h^2 a_2 \\ a_3 & h^2 a_3 & h a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & h^2 \\ 1 & h^2 & h \end{bmatrix}.$$

Zgodnie z twierdzeniem 2 można ostatecznie przyjąć następującą postać macierzy głównej **P**

$$\mathbf{P} = \mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & h^2 \\ 1 & h^2 & h \end{bmatrix} \quad (16)$$

diagonalizującej macierz opornościową **Z_{em}**. Macierz **S** wyznacza przekształcenie określające składowe symetryczne, które są powszechnie znane i stosowane dla analizy niesymetrycznych stanów pracy sieci trójfazowych. Otrzymaliśmy istotny wniosek z dotychczasowych rozważań a mianowicie:

*Jedynie przekształcenie określone przez macierz **S**, eliminując oporności wzajemne elementów obwodu ma własność eliminowania oporności wzajemnych pomiędzy obwodami sieci przekształconej, przy obliczeniach symetrycznych sieci trójfazowych zawierających maszyny obrotowe (Oczywiście tę samą własność posiadają przekształcenia pochodne (13) od przekształcenia **S**).*

5. PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE W TRÓJFAZOWYM SYMETRYCZNYM OBWODZIE STATYCZNYM

Symetryczne elementy statyczne mają macierze opornościowe o postaci **Z_{es}**. Maszyny obrotowe w określonych warunkach mają własność pozwalające przyjąć dla nich macierze opornościowe również o postaci **Z_{es}**, co wynika z warunku

$$Z_{11} = Z_{22},$$

równości oporności dla składowej zgodnej i przeciwnej.

Ponieważ macierz Z_{es} jest szczególnym przypadkiem macierzy Z_{em} powstaje pytanie, czy nie istnieją inne przekształcenia główne, poza przekształceniem omówionym w rozdziale 4, diagonalizujące macierze typu (7).

Zgodnie z twierdzeniem 4, nie zawężając ogólności rozważań, poszukujemy macierzy A spełniającej warunek

$$Z_p = A \begin{bmatrix} Z_s & Z_m & Z_m \\ Z_m & Z_s & Z_m \\ Z_m & Z_m & Z_s \end{bmatrix} A^{-1},$$

gdzie Z_p ma być macierzą diagonalną. Równanie powyższe można rozwinąć w następujący sposób:

$$Z_p = A \left((Z_s - Z_m) E + Z_m \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) A^{-1} = (Z_s - Z_m) E + Z_m A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A^{-1}.$$

Jeśli Z_p ma być macierzą diagonalną dla wszelkich wartości Z_s i Z_m , to również diagonalna powinna być macierz

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} A^{-1} = \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Wielomianem charakterystycznym macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

będzie

$$w(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3 + 2 - 3(1-\lambda) = -\lambda^3(\lambda-3).$$

Pierwiastkami tego wielomianu są liczby 3, 0, 0. Na podstawie wniosku 3 w rozdziale 3 otrzymujemy

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0,$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podstawiając wyznaczoną macierz λ w równanie (17) otrzymamy

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a po prawostronnym pomnożeniu przez macierz \mathbf{A}

$$\begin{bmatrix} a_{11} + a_{12} + a_{13} & a_{11} + a_{12} + a_{13} & a_{11} + a_{12} + a_{12} \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} & a_{21} + a_{22} + a_{23} & a_{21} + a_{22} + a_{23} \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} & a_{31} + a_{32} + a_{33} & a_{31} + a_{32} + a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z powyższej równości macierzowej wynika

$$\begin{aligned} a_{11} &= a_{12} = a_{13}, \\ a_{21} + a_{22} + a_{23} &= 0, \\ a_{31} + a_{32} + a_{33} &= 0. \end{aligned}$$

Równania powyższe określają warunki, jakie powinny spełniać elementy poszukiwanej macierzy \mathbf{A} , aby diagonalizowała ona macierz \mathbf{Z}_{es} . Wprowadzamy oznaczenia

$$\begin{aligned} a_{11} &= k, \\ a_{21} &= l, \quad a_{22} = m, \\ a_{31} &= n, \quad a_{32} = p. \end{aligned}$$

Macierz \mathbf{A} można wówczas napisać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} k & k & k \\ l & m & -(l+m) \\ n & p & -(n+p) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

przy czym

$$k(lp - mn) \neq 0, \quad (19)$$

bowiem zgodnie z założeniem

$$|\mathbf{A}| = 3k(lp - mn) \neq 0.$$

Z zależności (19) wynika, że co najmniej w jednej kolumnie macierzy (18) wszystkie elementy są różne od zera. Jeśli przyjmiemy, że będzie to kolumna pierwsza

$$k \neq 0, \quad l \neq 0, \quad n \neq 0,$$

wtedy

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & l & 0 \\ 0 & 0 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & -(l-m) \\ 1 & l & l \\ 1 & p & -(n-p) \\ & n & n \end{bmatrix}.$$

Na podstawie twierdzenia 2 i wprowadzając oznaczenia

$$\frac{m}{l} = s, \quad \frac{p}{n} = t$$

można nadać macierzy głównej następującą postać

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & -(1+s) \\ 1 & t & -(1+t) \end{bmatrix}, \quad (20)$$

przy czym warunek nieosobliwości macierzy P będzie

$$t \neq s.$$

Elementy s i t mogą być dowolnymi, różnymi liczbami zespolonymi.

Godny podkreślenia jest fakt, że każda macierz główną określają dwie liczby s i t (i odw.). Wniosek ten nie wynika bezpośrednio z postaci macierzy (18) i dlatego jako ogólną postać macierzy głównych przyjęto wyrażenie (20).

Jezeli symetryczna sieć trójfazowa składa się z elementów, których macierze opornościowe mają postać (7), a więc oporności Z_{11} i Z_{22} tych elementów są sobie równe, to każda macierz P o postaci (20), gdzie s i t są dowolnymi ale różnymi liczbami zespolonymi, można uważać za macierz główną diagonalizującą macierze opornościowe wszystkich elementów sieci. Innymi więc nieskończenie wiele macierzy głównych (a więc nieskończenie wiele zbiorów macierzy A i B), które eliminują oporności wzajemne pomiędzy obwodami sieci przekształconej.

Jednym z takich przekształceń jest oczywiście przekształcenie prowadzące do układów symetrycznych. Należy wtedy przyjąć w wyrażeniu

$$s = h, \quad t = h^2. \quad (20)$$

Przyjmując zgodnie z (13) i (20)

$$A - B \cdot \lambda \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix},$$

gdzie jak widać założono $s = -2$, $t = 0$, otrzymuje się przekształcenie podane przez E. Clarke [1].

E. W. Kimbark [3] podał inne przekształcenie, w którym prądy i napięcia są przekształcane za pomocą różnych macierzy ($\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{K}^2 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{K}^2 \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Jak widać, przyjęto $s = -2$, $t = 0$. Tak więc przekształcenia E. Clarke i E. W. Kimbarka należą do tego samego zbioru par macierzy przekształcających \mathbf{A} i \mathbf{B} , określonego przez zależność (13), przy czym macierzą główną zbioru jest macierz

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

czyli macierz (20) dla $s = -2$, $t = 0$.

Każda z macierzy głównych (20) diagonalizuje macierz \mathbf{Z}_{es} . Zgodnie z wnioskiem 3 w rozdziale 3 oraz biorąc pod uwagę, że macierz \mathbf{S} jest jedną z macierzy głównych (20), można stwierdzić, że macierz \mathbf{Z}_p będzie

$$\mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} Z_{00} & 0 & 0 \\ 0 & Z_{11} & 0 \\ 0 & 0 & Z_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_s + 2Z_m & 0 & 0 \\ 0 & Z_s - Z_m & 0 \\ 0 & 0 & Z_s - Z_m \end{bmatrix}$$

niezależnie od przyjętych wartości s i t w macierzy głównej (20). Jeśli przekształcenie będzie określone nie macierzą główną (20), a macierzami pochodnymi \mathbf{A} i \mathbf{B} (13), to przekształcona macierz opornościowa będzie

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda_1}{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_2}{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_3}{\varepsilon_3} \end{bmatrix} \mathbf{K}^n \begin{bmatrix} Z_s + 2Z_m & 0 & 0 \\ 0 & Z_s - Z_m & 0 \\ 0 & 0 & Z_s - Z_m \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-n}$$

Jest to oczywiście również macierz diagonalna, której elementami są oporności

$$Z_{00} = Z_s + 2Z_m, \quad Z_{11} = Z_s - Z_m \quad \text{ i } \quad Z_{22} = Z_s - Z_m$$

pomnożone przez pewne współczynniki. Współczynniki te, jak widać będą ilorazami odpowiednich elementów macierzy diagonalnych λ i ε (patrz zależność 13).

Na zakończenie należy podkreślić, że istnieje nieskończenie wiele macierzy głównych o postaci (20) diagonalizujących macierz opornościową \mathbf{Z}_{es} . Każda z macierzy głównych jest określona jednoznacznie parą liczb zespolonych s i t . Fakt ten stwarza możliwości doboru macierzy przekształcających zależnie od rozpatrywanego zagadnienia, co może ułatwić obliczenia i analizę rozpatrywanego zjawiska.

* * *

Pragnę podziękować doc. Zygmuntowi Skoczyńskiemu za przedyskutowanie ze mną zagadnień poruszonych w pracy oraz za poczynione uwagi.

*Instytut Elektrotechniki
Zakład Wielkich Mocy*

WYKAZ LITERATURY

1. Clarke E.: *Circuit analysis of AC power systems*, New-York 1943.
2. Faddiejewa W. N.: *Metody numeryczne algebry liniowej*, P.W.N., Warszawa 1955.
3. Kimbark E. W.: *Two-phase coordinates of a three-phase circuit*. AIEE, V. 58, 1939.
4. Kostenko M. P.: *Elektricheskie masziny (specjalna część)*. Gosenergoizdat 1949.
5. Pipes L. A.: *Linear transformations in three-phase circuits*. AIEE, V 60, 1941.
6. Skoczyński Z.: *Składowe symetryczne — Wstęp. Przesył i rozdział energii elektrycznej*. PWT, T. III, Warszawa 1951.

А. ПШЫЛУСКИ

ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ ТРЁХФАЗНЫХ КОНТУРОВ ИСКЛЮЧАЮЩИХ ВЗАИМНЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Резюме

В расчёте трёхфазных электрических сетей применяются разные составляющие токов и напряжений, причём на первом месте следует здесь упомянуть о симметричных составляющих.

Симметричные или какие-либо иные составляющие (например $\alpha, \beta, 0$) основаны на линейном преобразовании напряжений и токов. Основной чертой применяемых преобразований, облегчающей расчёты и анализ контура, является исключение взаимных сопротивлений между фазами трёхфазного контура.

Если применить линейное преобразование фазовых напряжений, определённые неособенной матрицей **A**, а также преобразование токов в проводах, определённое неособенной матрицей **B**, то уравнение (1) примет вид $\mathbf{U}_p = \mathbf{Z}_p \mathbf{I}_p$ (3). Соответственным подбором матриц **A** и **B** можно получить диагональный вид матрицы \mathbf{Z}_p .

Матрицы сопротивлений **Z** (2) симметричных трёхфазных элементов отличаются особенным строением. Симметричный статический элемент имеет матрицу вида \mathbf{Z}_{es} (7), а симметричная машина матрицу вида \mathbf{Z}_{em} (8). Благодаря этому является возможным подобрать матрицу **A** и **B** с независимыми от сопротивления Z_s, Z_{m1}, Z_{m2}, Z_m , (7, 8) элементами такими образом, чтобы матрица $\mathbf{Z}_p = \mathbf{A} \mathbf{Z} \mathbf{B}^{-1}$ была диагональной.

Это соответствует исключению взаимных сопротивлений для каждого элемента любой (но симметричной) трёхфазной сети. В преобразованной схеме системы (p) можно тогда контур каждой составляющей рассматривать независимо.

Целью настоящего труда является указание общего вида преобразовательных матриц **A** и **B** с независимыми от параметров рассматриваемого контура элементами, диагонализующими матрицы сопротивлений симметричных элементов сети.

В статье подаются математические зависимости, определяющие свойства преобразования (3), необходимые в дальнейших соображениях.

Рассмотрен общий случай симметричной трёхфазной сети, а именно сети содержащей между прочим элементы, для которых сопротивление Z_{11} для симметричной составляющей положительной последовательности не равно сопротивлению Z_{22} для симметричной составляющей отрицательной последовательности.

На основании элементарных принципов матричного исчисления доказано, что существует множество матричных пар **A** и **B** определённое матрицей

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & h^2 \\ 1 & h^2 & h \end{bmatrix}$$

и зависимостями (13), удовлетворяющее условиям диагонализации, определённым в главе 2-ой. В выражении (13) λ и ε являются произвольными неособенными диагональными матрицами, а матрица **K** определена выражением (9). Матрица **S** как видно, является матрицей симметричных составляющих. Каждая матричная

пара **A** и **B** удовлетворяющая требуемым условиям диагонализации, определённым в главе 2-ой, может быть представлена матрицей **S** и зависимостями (13).

Во многих практических вычислениях предполагается равенство $Z_{11}=Z$ для всех элементов сети. Такое предположение эквивалентно принятию $Z_{m_1}=Z_{m_2}=Z_m$ итак, матрицы сопротивлений элементов системы имеют тогда вид Z_{rs} (7). Способностью одновременной диагонализации матриц сопротивлений всех элементов обладает в таком случае всякая матричная пара **A** и **B** определённая уравнениями (13) и матрицей **P** вида

$$P = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & -(1+s) \\ 1 & t & -(1+t) \end{bmatrix}$$

где *s* и *t* могут быть произвольными, но не равными ($s \neq t$) комплексными числами. Ввиду присутствия параметров *s* и *t* существует бесконечное число преобразований, определённых матрицами **P** и бесконечное количество множеств матричных пар **A** и **B** определяемых матрицами **P** и (13), которые исключают взаимные сопротивления между элементами преобразованной сети. Одним из таких преобразований являются симметричные составляющие ($s=h, t=h^2$) другим — преобразования поданные авторами Е. Клярком и Е. В. Кимбарком ($s=-2, t=0$.)

A. PRZYŁUSKI

THE ELIMINATION OF MUTUAL IMPEDANCES
BY LINEAR TRANSFORMATIONS OF THREE-PHASE SYMMETRICAL
CIRCUITS

Summary

In calculations involving three-phase electrical networks the currents and voltages are broken up into various components, the most important of these being the symmetrical components. The use of symmetrical or any other components (for example $\alpha, \beta, 0$) is based on a linear transformation of the voltages and currents. The basic feature of the transformations used for facilitating circuit analysis and computational work is the elimination of mutual impedances between the phases of a three-phase circuit.

If the linear transformation of the phase voltages is defined by a non-singular matrix **A** and the transformation of line currents is defined by a non-singular matrix **B**, then equation (1) takes the form $U_p = Z_p I_p$ (3). Matrix Z_p can be obtained in diagonal form by a suitable choice of matrices **A** and **B**.

The impedance matrices **Z** (2) of the symmetrical three-phase elements have a particular structure. A static symmetrical element has an impedance matrix of the form Z_{es} (7), and a rotating symmetrical machine has an impedance matrix of the form Z_{em} (8). As a result, it is possible to choose matrix **A** and **B** independent of the impedances $Z_s, Z_{m_1}, Z_{m_2}, Z_m$ (7), (8) so that the matrix $Z_p = \mathbf{AZB}^{-1}$ is diagonal. This corresponds to the elimination of the mutual impedances for each element of any symmetrical three-phase network. In the transformed system (*p*) the circuit of each component can be treated independently. The object of this paper is to present the general form of the transformation matrices **A** and **B** having elements independent of the parameters of the circuit under consideration, and which diagonalize the impedance matrices of the symmetrical elements of the network.

Mathematical relations for determining the properties of transformation (3) are also given. They will be necessary for the work that follows.

This paper treats the general case of a symmetrical three-phase network containing elements for which the positive-sequence impedance Z_{11} is not equal to the negative-sequence impedance Z_{22} . On the basis of elementary matrix theory, it is shown that there is a set of pairs of matrices **A** and **B** determined by the matrix

$$\mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & h & h^2 \\ 1 & h^2 & h \end{bmatrix}$$

and equation (13) which satisfies the conditions for diagonalization given in section 2. In (13), λ and ϵ are arbitrary non-singular diagonal matrices, and matrix **K** is defined by (9). Each pair of matrices **A** and **B** which satisfies the required conditions for diagonalization as outlined in section 2, can be represented by matrix **S** with the equations (13).

It is assumed, in many practical computations, that the positive-sequence and negative-sequence impedances of all network elements are equal to each other. This assumption is equivalent to taking $Z_{m1} = Z_{m2} = Z_m$; thus, the impedance matrices for the system elements then have the form \mathbf{Z}_{es} (7). Each pair of matrices **A** and **B** determined by equations (13) and by matrix **P** having the form

$$\mathbf{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & s & -1+s \\ 1 & t & -(1+t) \end{bmatrix}$$

where s and t are arbitrary, but different ($s \neq t$) complex numbers, are then able to diagonalize the impedance matrices of each of the elements. As a result of the presence of parameters s and t , there exists an infinite number of transformations determined by matrices **P**. There is also an infinite number of sets of pairs of matrices **A** and **B** determined by **P** and (13), which eliminate the mutual impedances between the circuits of the transformed networks. One of these transformations are the symmetrical components ($s=h$, $t=h^2$); another transformation, given by E. Clarke and E. W. Kimbark is ($s=-2$, $t=0$).

A. TURSKI

Obliczanie strat w gładkich ściankach falowodów kołowych na podstawie równań Maxwella

Rękopis dostarczono 6. 5. 1955

Klasyczne metody przybliżonego obliczania strat powodowanych niedoskonałym przewodnictwem ścianek falowodu nie dają informacji o dokładności otrzymanych wzorów oraz nie pozwalają na wyznaczenie tłumienia w pobliżu i poniżej częstotliwości krytycznej. Tematem pracy jest obliczenie zespolonej wartości stałej propagacji fal w falowodzie kołowym z przewodzącymi ściankami dla wszystkich częstotliwości. Obliczenie to pozwoliło na wyznaczenie względnego błędu popełnionego przy znanych przybliżonych wzorach na współczynnik tłumienia.

Zasadnicza droga przedstawionej metody jest podobna do drogi Sommerfelda [4] w przypadku rozchodzenia się fal wzdłuż jednego przewodu. Polega ona na przybliżonym rozwiązaniu transcendentnego równania, wynikającego z ciągłości składowych stycznych natężeń pól na granicy dwóch ośrodków.

1. WSTĘP

Fale elektromagnetyczne rozchodzące się w falowodach, których przewodność ścianek jest zawsze ograniczona, przenikają w ścianki wywołując tam prądy dające straty wskutek zjawiska Joule'a. Straty te zachodzą wzdłuż falowodu i powodują tłumienie fal. Wyrażenia na pole elektromagnetyczne muszą zawierać czynniki $e^{-\beta z} \cdot e^{i(\alpha z - \omega t)}$ w takiej postaci, aby jeden wyrażał propagację, drugi — tłumienie. Przedstawimy pokrótce dwie klasyczne metody przybliżonego obliczania tłumienia.

Pierwsza z nich, szerzej stosowana, prowadzi do stosunkowo prostych rachunków, druga zaś, podana przez L. de Broglie [1], jest ściślejsza i uwzględnia zjawiska fizyczne. W pierwszej jak zresztą i drugiej zauważa się, że współczynnik tłumienia β jest bardzo mały wobec części rzeczywistej stałej propagacji α . Jako wyrażenia na pole w falowodzie przyjmuje się te wyrażenia, które otrzymano w założeniu, że ścianki są doskonale przewodzące. Przybliżenie takie nie jest logiczne, ponieważ przyjęte rozwiązania odpowiadają warunkowi, iż pole elektryczne na ściankach falowodu równa się zeru i wówczas składowa normalna wektora Poyntinga jest

wszędzie równa zero, a więc nie ma strumienia energii w kierunku radialnym z wewnątrz falowodu w kierunku grubości ścianek i wskutek tego nie ma strat na zjawisko Joule'a, co jest sprzeczne z założeniem. Druga metoda jest bardziej ścisła, przyjęto w niej bowiem pod uwagę fakt, że pole nie ma dokładnie takiego kształtu jak w przypadku doskonałej przewodności.

Rozpatrzmy zasadę rachunku pierwszej metody. Jeśli przez P_1 oznaczmy strumień energii wyjściowej przez przekrój falowodu na jednostkę czasu, to dla dowolnej długości falowodu

$$P_2 = P_1 e^{-2\beta z}.$$

Mamy -2β , ponieważ strumień energii jest zależnością kwadratową pól. Jeżeli strumień energii strat $P_0 = P_1 - P_2$, to dla falowodu o długości jednego metra będzie

$$\frac{P_0}{P_1} = 1 - e^{-2\beta}.$$

Rozwijając wyrażenie wykładnicze na szereg i zachowując jedynie dwa pierwsze wyrazy, otrzymamy dostateczne przybliżenie dla współczynnika tłumienia $\beta \ll 1$, to jest

$$\beta \approx \frac{P_0}{2P_1}.$$

Przybliżenie w tej metodzie polega na zaniedbaniu dalszych wyrazów rozwinięcia oraz na obliczeniu P_0 i P_1 w zależności od wartości pól, obliczonych dla przypadku ścianek doskonale przewodzących. Obliczenie P_1 będzie natychmiastowe w zależności od wyrażeń przyjętych dla pól. Mogą tu powstać tylko trudności praktyczne przy obliczaniu całki wektora Poyntinga. Energię traconą w ściankach oblicza się na podstawie stycznego pola magnetycznego znajdując prąd w ściance falowodu. Mając prąd w ściance falowodu możemy określić straty wywołane opornością powierzchniową określoną dla danego materiału ścianek i zależną od częstotliwości. Innymi słowy przyjmuje się, że prądy w rzeczywistych przewodnikach są takie jak w idealnych i dla tak obliczonych prądów wyznacza się straty uwzględniając oporność powierzchniową. Metoda ta nie jest ścisła, prowadzi jednak, jak później się przekonamy, do dość dokładnych wyników dla częstotliwości większej od częstotliwości granicznej, gdzie β jest dostatecznie małe w porównaniu z α . W przypadku dużego tłumienia fali w falowodzie, na przykład w pobliżu częstotliwości granicznej, a metoda jak i metoda podana przez L. de Broglie nie przedstawia żadnej wartości.

Niżej przedstawiona zostanie druga ściślejsza metoda, w której wzięto pod uwagę modyfikację pól na skutek niedoskonałej przewodności ścianki oraz przenikanie fal w ściankę. Omówimy zasadę tej metody.

Wskutek strat fala rozchodząca się w falowodzie zawiera czynnik e^{ihz} jednak wartość stałej propagacji h jest tu inna niż a^0 , jak to miało miejsce w przypadku stałej propagacji dla ścianek doskonale przewodzących. Przyjmuje się

$$h = a^0 + \delta a + i\beta.$$

Następnie przy założeniu, że δa i β są bardzo małe w stosunku do $|h|$ oraz przy założeniu, że stała propagacji jest w przewodniku znacznie większa od a^0 , wyznaczamy przybliżone wyrażenia na pole w ściankach i wewnątrz falowodu. Dalej zakładając ciągłość składowych stycznych pól elektrycznego, magnetycznego i składowych normalnych indukcji elektrycznej i magnetycznej otrzymujemy zależność, z której wyliczymy δa i β . Metoda ta została zastosowana tylko dla pól osiowo-symetrycznych i doprowadziła do identycznych wyników jak metoda poprzednia. W przypadku fal wyższych rodzajów metoda ta prowadziłaby do skomplikowanych obliczeń. Pozwala ona jednak bez przeprowadzania obliczeń przewidzieć w tym ostatnim przypadku, że wskutek niedoskonałej przewodności ścianek, fale elektromagnetyczne w falowodzie rzeczywistym przestają należeć ściśle do typu elektrycznego (TE) lub magnetycznego (TM). Tworzy się pewien rodzaj fal powstałych z połączenia dwóch typów fal i to jest wynikiem, którego pierwsza metoda obliczania strat nie pozwala przewidzieć, jednak nie daje ona odpowiedzi, jakiego rzędu jest błąd wzorów przybliżonych ze względu na rzeczywistą przewodność i częstotliwość.

W pracy niniejszej przedstawiona będzie metoda oparta o ściśle założenia na podstawie równań Maxwella. Zasadnicza droga tej metody jest podobna do drogi Sommerfelda w przypadku rozpatrywania rozchodzenia się fal wzdłuż jednego przewodu. Polega ona na dokładnym wyznaczeniu wyrażen na pole wewnątrz falowodów kołowych i w jego ściankach bez zakładania doskonałej przewodności ścianek oraz na przybliżonym rozwiązaniu równania transcendentalnego. Równanie transcendentalne wynika z ciągłości składowych stycznych natężenia pól na granicy dwóch ośrodków. Pierwiastki tego równania wyznaczają wszystkie możliwe wartości stałej propagacji h i tym samym pozwalają wyznaczyć współczynnik tłumienia. Rozwiązanie otrzymuje się przez aproksymację funkcji Bessela właściwą dla przedziału, do którego należą wartości argumentów. Wyniki otrzymane tą metodą pozwalają wyznaczyć błąd poprzednich metod obliczania współczynnika tłumienia dla wszystkich rodzajów fal w falowodach kołowych. Można również wyznaczyć wzory na współczynnik tłumienia β tam, gdzie nie jest on mały w porównaniu z a .

2. POLE ELEKTROMAGNETYCZNE WE WSPÓŁRZĘDNYCH WALCOWYCH

Równania Maxwella dla jednorodnego, izotropowego, pozbawionego swobodnych ładunków ośrodka o przewodności σ , przenikalności dielektrycznej ε i magnetycznej μ będą

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sigma \mathbf{E}, \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0,$$

gdzie \mathbf{E} i \mathbf{H} jest natężeniem pól odpowiednio elektrycznego i magnetycznego, \mathbf{D} i \mathbf{B} — indukcją elektryczną i magnetyczną. Jak wiadomo, całkowanie równań Maxwella można sprowadzić w ogólnym przypadku do wyznaczenia jednej funkcji wektorowej [3]. Natężenie pola przedstawimy za pomocą elektrycznego i magnetycznego wektora Hertza, to znaczy Π i Π^* ; wówczas [5]

$$\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \Pi - \mu \nabla \times \frac{\partial \Pi^*}{\partial t},$$

$$\mathbf{H} = \nabla \times \left(\varepsilon \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \sigma \Pi \right) + \nabla \times \nabla \times \Pi^*,$$

przy czym Π i Π^* spełniają następujące równania:

$$\Delta \Pi - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0,$$

$$\Delta \Pi^* - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \Pi^*}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \Pi^*}{\partial t} = 0.$$

Następnie wyznacza się składowe pola elektromagnetycznego we współrzędnych walcowych w ogólnym przypadku pola.

W przypadku, gdy elektryczny i magnetyczny wektor Hertza jest skierowany wzdłuż osi z , czyli

$$\Pi_x = 0, \quad \Pi_y = 0, \quad \Pi_z \neq 0 \quad \text{oraz} \quad \Pi_x^* = 0, \quad \Pi_y^* = 0, \quad \Pi_z^* \neq 0,$$

wówczas otrzymamy następujące wyrażenia na składowe pola:

$$\left. \begin{aligned} E_r &= \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial r} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial t \partial \vartheta}, \\ E_\vartheta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z \partial \vartheta} + \mu \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial t \partial r}, \\ E_z &= -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \vartheta} \right) \right], \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} H_r &= \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z}{\partial \vartheta} + \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial r}, \\ H_\vartheta &= - \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} + \sigma \right) \frac{\partial \Pi_z}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Pi_z^*}{\partial z \partial \vartheta}, \\ H_z &= - \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Pi_z^*}{\partial \vartheta} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Pole elektromagnetyczne jest wynikiem złożenia dwóch szczególnych postaci pól otrzymanych z Π_z i Π_z^* ; jest ono ogólne, jeżeli może spełniać zadane warunki brzegowe na dowolnej kołowej powierzchni walcowej z tworzącymi równoległymi do osi z .

3. RÓWNANIE FALOWE I JEGO ROZWIĄZANIE WE WSPÓŁRZĘDNYCH WALCOWYCH

Składowe Π_z oraz Π_z^* są składowymi prostokątnymi, przeto powinny spełniać skalarne równanie falowe

$$\Delta \Psi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \mu \sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

w którym $\Psi = \Pi_z$ i $\Psi = \Pi_z^*$. Stosując przekształcenie równania (3) na współrzędne walcowe otrzymujemy

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + (k^2 - h^2) f = 0, \quad (4)$$

gdzie

$$k^2 = \varepsilon \mu \omega^2 + i \sigma \mu \omega$$

h — stała propagacji fali w falowodzie

$$\Psi = f(\vartheta, r) e^{\pm i h z - i \omega t}. \quad (5)$$

Separując zmienne

$$f(\vartheta, r) = f_1(r) f_2(\vartheta),$$

otrzymamy

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{df_1}{dr} \right) + [(k^2 - h^2) r^2 - p^2] f_1 = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 f_2}{d\vartheta^2} - p^2 f_2 = 0.$$

Parametry p i n są stałymi separacji; wartość parametru p będzie uwarunkowana jednoznacznością pola w ustalonym punkcie obszaru. Przy

założeniu jednorodności i ciągłości ośrodka, pole powinno być periodyczne względem ϑ i p oraz powinno przyjmować wartości $n=0, \pm 1, \pm 2 \dots$. Jeżeli

$$\varrho = r \sqrt{k^2 - h^2},$$

$$f_1(\varrho) = \varphi_p(\varrho),$$

wtedy równanie (6) przyjmuje postać

$$\frac{d^2 \varphi_p}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{d\varphi_p}{d\varrho} + \left(1 - \frac{p^2}{\varrho^2}\right) \varphi_p = 0. \quad (7)$$

Równanie (7) jest równaniem Bessela i ma dwa punkty osobliwe dla $\varrho=0$ i dla $\varrho=\infty$. Ważniejsze wzory i własności funkcji Bessela, potrzebne w dalszej części pracy, podajemy niżej.

Dla dowolnego p rzeczywistego lub zespolonego, jak również dla rzeczywistego lub zespolonego ϱ , można rozwinąć szczególne rozwiązanie równania (7) w następujący szereg:

$$I_p(\varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(p+m+1)} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{p+2m} \quad (8)$$

Jeżeli $p=n$ (całkowite), to $I_p(\varrho)$ staje się jednoznaczną funkcją punktu i wtedy $\Gamma(n+m+1) = (n+m)!$

$$I_n(\varrho) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! (n+m)!} \left(\frac{\varrho}{2}\right)^{n+2m}, \quad \text{dla } n=0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

Można wykazać, że

$$I_{-n}(\varrho) = (-1)^n I_n(\varrho).$$

Funkcję Bessela drugiego rodzaju (Neumana) wyznacza się z zależności

$$N_p(\varrho) = \frac{1}{\sin p\pi} [I_p(\varrho) \cos p\pi - I_{-p}(\varrho)]. \quad (10)$$

Powyższe rozwiązanie równania (7) jest liniowo niezależne od $I_p(\varrho)$ dla wszystkich wartości p . Prawa strona wyrażenia (10) staje się wyrażeniem nieoznaczonym dla p całkowitych. Wartość jej można obliczyć zwykłym sposobem różniczkując licznik i mianownik względem p i przechodząc do granicy gdy $p \rightarrow n$.

Dla dużych ϱ pole cylindrycznych fal wyraża się funkcjami Bessela trzeciego rodzaju (Hankela).

$$\mathcal{H}_p^{(1)}(\varrho) = I_p(\varrho) + iN_p(\varrho),$$

$$\mathcal{H}_p^{(2)}(\varrho) = I_p(\varrho) - iN_p(\varrho).$$

Wzór asymptotyczny dla funkcji $\mathcal{H}_p^{(1)}(\varrho)$ [2] jest

$$\mathcal{H}_p^{(1)}(\varrho) = \sqrt{\frac{2}{\pi\varrho}} \frac{e^{i\left(\varrho - \frac{p\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}}{\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)} \left[\sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{p - \frac{1}{2}}{\nu} \Gamma\left(p + \nu + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{i}{2\varrho}\right)^\nu + O(|\varrho|^{-k}) \right], \quad (11)$$

gdzie $O(|\varrho|^{-k})$ jest znany symbolem takim, iż

$$\lim_{|\varrho| \rightarrow \infty} \frac{O(|\varrho|^{-k})}{|\varrho|^{-k}} = \text{const} < \infty, \quad (12)$$

znany zaś wzór rekurencyjny

$$\frac{d\varphi_p}{d\varrho} = \frac{1}{2} (\varphi_{p-1} - \varphi_{p+1}). \quad (13)$$

4. ROZCHODZENIE SIĘ FAŁ WZDŁUŻ WALCA

Pole wewnątrz jednorodnego, izotropowego obszaru może być przedstawione jako liniowa kombinacja funkcji (5)

$$\Psi_{nkh} = e^{in\vartheta} I_n(r\sqrt{k^2 - h^2}) e^{\pm i h z - i \omega t}, \quad (14)$$

$$\Psi_{nkh} = e^{in\vartheta} \mathcal{H}_n^{(1)}(r\sqrt{k^2 - h^2}) e^{\pm i h z - i \omega t}, \quad (15)$$

gdzie p zastąpiono $n=0, 1, 2$ w celu zapewnienia jednoznaczności pola w ustalonym punkcie obszaru.

Dla skończonego obszaru, w którym $r=0$, przyjmuje się tylko funkcje (14), dla dużych odległości natomiast przyjmuje się funkcje (15). Każdą elementarną falę wyznacza się za pomocą parametrów n, k, h . Przy $n=0$ pole jest symetryczne wokół osi, przy $h=0$ fale rozchodzą się tylko w kierunku radialnym i pole staje się dwuwymiarowe.

Jeśli dane są warunki brzegowe dla pewnej powierzchni walcowej, to pole jest superpozycją elementarnych funkcji falowych. Zgodnie z (1) i (2) mamy

$$\left. \begin{aligned} E_r &= i h \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} - \frac{\mu \omega}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n b_n \Psi_n, \\ E_\vartheta &= -\frac{h}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n \Psi_n - i \mu \omega \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial r}, \\ E_z &= (k^2 - h^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \Psi_n, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 H_r &= \frac{k^2}{\mu\omega} \frac{1}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n \Psi_n + i h \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial r}, \\
 H_\theta &= \frac{i k^2}{\mu\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\partial \Psi_n}{\partial r} - \frac{h}{r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n b_n \Psi_n, \\
 H_z &= (k^2 - h^2) \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \Psi_n
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

gdzie a_n i b_n są stałymi współczynnikami rzeczywistymi, wyznaczanymi z warunków wzbudzenia.

W przypadku jednorodnego, izotropowego walca o przekroju kołowym i o promieniu a [m], mającego współczynnik propagacji k_1 i ośrodka k_2 , w którym to ośrodku walec znajduje się zgodnie z powyższymi wywodami oraz równaniami (16) i (17) dla fal wewnątrz walca, przy $r < a$, otrzymujemy:

$$\left. \begin{aligned}
 E_r^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{i h}{\lambda_1} I_n'(\lambda_1 r) a_n^{(1)} - \frac{\mu_1 \omega n}{\lambda_1^2 r} I_n(\lambda_1 r) b_n^{(1)} \right] F_n, \\
 E_\theta^{(1)} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{n h}{\lambda_1^2 r} I_n(\lambda_1 r) a_n^{(1)} + \frac{i \mu_1 \omega}{\lambda_1} I_n'(\lambda_1 r) b_n^{(1)} \right] F_n, \\
 E_z^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n(\lambda_1 r) a_n^{(1)}] F_n, \\
 H_r^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{n k_1^2}{\mu_1 \omega \lambda_1^2 r} I_n(\lambda_1 r) a_n^{(1)} + \frac{i h}{\lambda_1} I_n'(\lambda_1 r) b_n^{(1)} \right] F_n, \\
 H_\theta^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{i k_1^2}{\mu_1 \omega \lambda_1} I_n'(\lambda_1 r) a_n^{(1)} - \frac{n h}{\lambda_1^2 r} I_n(\lambda_1 r) b_n^{(1)} \right] F_n, \\
 H_z^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [I_n(\lambda_1 r) b_n^{(1)}] F_n.
 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Dla fal na zewnątrz walca, przy $r < a$, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 E_r^{(2)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{ih}{\lambda_2} \mathcal{H}_n^{(1)'}(\lambda_2 r) a_n^{(2)} - \frac{\mu_2 \omega n}{\lambda_2^2 r} \mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^{(2)} \right] F_n, \\
 E_\vartheta^{(2)} &= - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{nh}{\lambda_2^2 r} \mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^{(2)} + \frac{i\mu_2 \omega}{\lambda_2} \mathcal{H}_n^{(1)'}(\lambda_2 r) b_n^{(2)} \right] F_n, \\
 E_z^{(2)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^{(2)}] F_n, \\
 H_r^{(2)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{nk_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2^2 r} \mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda_2 r) a_n^{(2)} + \frac{ih}{\lambda_2} \mathcal{H}_n^{(1)'}(\lambda_2 r) b_n^{(2)} \right] F_n, \\
 H_\vartheta^{(2)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{ik_2^2}{\mu_2 \omega \lambda_2} \mathcal{H}_n^{(1)'}(\lambda_2 r) a_n^{(2)} - \frac{nh}{\lambda_2^2 r} \mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^{(2)} \right] F_n, \\
 H_z^{(2)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\mathcal{H}_n^{(1)}(\lambda_2 r) b_n^{(2)}] F_n,
 \end{aligned} \tag{19}$$

gdzie

$$\lambda_1^2 = k_1^2 - h^2,$$

$$\lambda_2^2 = k_2^2 - h^2,$$

$$F_n = e^{in\vartheta + i\lambda z - i\omega t}.$$

(Dodatni znak przy h oznacza dodatni kierunek rozchodzenia się fal). Korzystając z warunku ciągłości składowej stycznej natężenia pola przy przejściu z jednego do drugiego ośrodka, wyznaczamy transcendentalne równanie wiążące stałą propagacji h oraz współczynnik k_1 , k_2 i n . Z warunku ciągłości składowej stycznej wektora \mathbf{E} na granicy ośrodków, zgodnie z (18) i (19), wynika

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{nh}{u^2} I_n(u) a_n^{(1)} + \frac{i\mu_1 \omega}{u} I_n'(u) b_n^{(1)} &= \frac{nh}{v^2} \mathcal{H}_n^{(1)}(v) a_n^{(2)} + \frac{i\mu_2 \omega}{v} \mathcal{H}_n^{(1)'}(v) b_n^{(2)}, \\
 I_n(u) a_n^{(1)} &= \mathcal{H}_n^{(1)}(v) a_n^{(2)}.
 \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

Z ciągłości składowej stycznej wektora \mathbf{H} otrzymujemy

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{ik_1^2}{\mu_1 \omega u} I_n'(u) a_n^{(1)} - \frac{nh}{u^2} I_n(u) b_n^{(1)} &= \frac{ik_2^2}{\mu_2 \omega v} \mathcal{H}_n^{(1)'}(v) a_n^{(2)} - \frac{nh}{v^2} \mathcal{H}_n^{(1)}(v) b_n^{(2)}, \\
 I_n(u) b_n^{(1)} &= \mathcal{H}_n^{(1)}(v) b_n^{(2)},
 \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

gdzie

$$u = \lambda_1 a,$$

$$v = \lambda_2 a.$$

Nietrywialne rozwiązanie układu równań (20) i (21) dla $a_n^{(1)}$, $b_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $b_n^{(2)}$ istnieje, gdy wyznacznik tego układu równy jest zeru, to znaczy gdy:

$$\left[\frac{\mu_1}{u} \frac{I'_n(u)}{I_n(u)} - \frac{\mu_2}{v} \frac{\mathcal{H}_n^{(1)'}(v)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(v)} \right] \left[\frac{k_1^2}{\mu_1 u} \frac{I'_n(u)}{I_n(u)} - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \frac{\mathcal{H}_n^{(1)'}(v)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(v)} \right] = n^2 h^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)^2. \quad (22)$$

W przypadku dielektrycznego cylindra otoczonego idealnym przewodnikiem $v = \infty$ i na podstawie równania (22), otrzymujemy

$$\frac{I_n(u)}{I'_n(u)} = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{I'_n(u)}{I_n(u)} = 0.$$

Równania powyższe pozwalają wyznaczyć stałą propagacji h dla fal typu TE i TM i wówczas stała przyjmuje wartości rzeczywiste.

Wzór (22) daje wszelkie możliwe postacie fal rozchodzących się w walcu. Jeżeli przewodność zewnętrznego walca jest skończona, to istnieje związek między polem poprzeczno-magnetycznym i polem poprzeczno-elektrycznym.

5. PRZYBLIŻENIE WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA TŁUMIENIA W FALOWODZIE KOŁOWYM

Opisane we wstępie przybliżone metody pozwalają wyznaczyć wartość współczynnika tłumienia ze względu na straty w metalowych ściankach. Przedstawimy gotowe wyrażenia [6]:

dla fal typu TM

$$\beta_{nm} \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_1 \mu_2 f}{\mu_1 \sigma_2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{nm}}{f} \right)^2}}, \quad (23)$$

dla fal typu TE

$$\bar{\beta}_{nm} \approx \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi \varepsilon_1 \mu_2 f}{\mu_1 \sigma_2}} \frac{\frac{n^2}{\left(\frac{f_{nm}}{f} \right)^2} + \frac{\bar{u}_{nm}^2}{1 - \frac{n^2}{\bar{u}_{nm}^2}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{nm}}{f} \right)^2}}. \quad (24)$$

Wyniki te są słuszne tylko wtedy, gdy f jest większe od częstotliwości granicznej oraz $\frac{\sigma_2}{\varepsilon_2 \omega} \gg 1$.

Częstotliwość graniczna dla fal typu TM wynosi

$$f_{nm} = \frac{u_{nm}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad (25)$$

gdzie

u_{nm} — wartości, dla których $I_n(u_{nm}) = 0$,

a — promień falowodu kołowego.

Dla fal typu TE:

$$\bar{f}_{nm} = \frac{\bar{u}_{nm}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}, \quad (26)$$

gdzie

\bar{u}_{nm} — wartości, dla których $I'(\bar{u}_{nm}) = 0$.

6. PRZYBLIŻONE OBLICZENIE STAŁEJ PROPAGACJI $h_{nm} = \alpha_{nm} + i\beta_{nm}$ Z RÓWNIANIA TRANSCENDENTALNEGO

Równanie (22) dla każdej wartości n ma nieskończoną ilość pierwiastków; każdy z nich oznaczmy indeksem m . Pierwiastek równania może więc być napisany w postaci h_{nm} . Dla wyznaczenia pierwiastków równania (22) nie można podać ogólnej metody. Natomiast podamy przybliżoną metodę rozwiązywania tego równania z określoną dokładnością.

Wprowadzając do równania (22) oznaczenia:

$$\frac{\mathcal{H}_n^{(1)'}(v)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(v)} = \theta, \quad \frac{I_n'(u)}{I_n(u)} = Z, \quad (27)$$

otrzymamy

$$\left[\frac{\mu_1}{u} Z - \frac{\mu_2}{v} \theta \right] \left[\frac{k_1^2}{\mu_1 u} Z - \frac{k_2^2}{\mu_2 v} \theta \right] = n^2 h^2 \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)^2$$

lub po przemnożeniu

$$Z^2 - Z\theta \frac{u}{v} \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right) + \theta^2 \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{u^2}{v^2} - u^2 \frac{n^2 h^2}{k_1^2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)^2 = 0.$$

Z powyższego otrzymujemy dwa pierwiastki

$$Z_{1,2} = \frac{1}{2} (\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 4\eta}), \quad (28)$$

gdzie

$$\xi = \theta \frac{u}{v} \left(\frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{\mu_1}{\mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1} \right), \quad (29)$$

$$\eta = \theta^2 \frac{k_2^2}{k_1^2} \frac{u^2}{v^2} - u^2 \frac{n_2 h^2}{k_1^2} \left(\frac{1}{v^2} - \frac{1}{u^2} \right)^2. \quad (30)$$

W dalszych obliczeniach przyjmujemy, że walec wewnętrzny jest idealnym dielektrykiem, to znaczy $k_1 = \omega \varepsilon_1 \mu_1$, oraz że walec zewnętrzny jest rzeczywistym przewodnikiem. Wtedy $v \approx a k_2 \approx a \sqrt{i \omega \sigma \mu_2}$.

Jeżeli zauważymy, że $|k_2|$ jest bardzo duże w porównaniu z pozostałymi wielkościami występującymi w równaniu (29) i (30), to

$$|\xi| \gg |\eta|. \quad (31)$$

Wyrażenie (30) daje dwa pierwiastki Z_1 i Z_2 przy czym moduł jednego pierwiastka jest bardzo mały, drugi bardzo duży, co wynika z zależności (31). Wówczas w pierwszym przypadku napiszemy

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{\xi} + 0(|\xi|^{-3}), \quad (32)$$

w drugim zaś

$$Z_2 = \frac{\eta}{\xi} + 0(|\xi|^{-3}), \quad (33)$$

gdzie $|\xi| \ll 1$ dla wszystkich spotykanych w praktyce częstotliwości i przewodników metalowych, z których wykonano ściany falowodu.

Ponieważ

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{|\xi|^{-1}}{|k_2|^{-1}} = \text{const},$$

gdzie $0 < \text{const} < \infty$ a ξ i k_2 rozumiemy tu jako funkcję σ . Możemy zatem powiedzieć, że $\frac{1}{|\xi|}$ jest nieskończenie małą tego samego rzędu co $\frac{1}{|k_2|}$ ze względu na $\sigma \rightarrow \infty$. Korzystając z wyrażenia

$$v = a \sqrt{k_2^2 - h^2} = a k_2 \sqrt{1 - \frac{h^2}{k_2^2}} = a k_2 + 0(|k_2|^{-3}), \quad (34)$$

możemy napisać

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{I_n(u)}{I_n'(u)} = \frac{1}{\theta} \frac{a k_1^2}{k_2 u} \frac{\mu_2}{\mu_1} + 0(|k_2|^{-3}), \quad (35)$$

oraz

$$Z_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\theta \frac{u}{a k_2} - \frac{a}{\theta} \frac{n^2 h^2}{u^3 k_2} \right) + 0(|k_2|^{-3}). \quad (36)$$

Posługując się wzorem (11) i (13) możemy obliczyć θ z żadaną dokładnością. Obliczenie przeprowadzimy bezpośrednio różniczkując prawą stronę równania

$$\mathcal{H}_n^{(1)}(v) = \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{i(v - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \frac{i}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{v} + 0(|v|^{-2}) \right], \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n^{(1)'}(v) = & \left(i - \frac{1}{2v} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{i(v - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[1 + \frac{i}{2} \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) \frac{1}{v} + 0(|v|^{-2}) \right] + \\ & + \sqrt{\frac{2}{\pi v}} e^{i(v - \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi}{4})} \left[0(|v|^{-2}) \right], \end{aligned} \quad (38)$$

dzieląc oba równania przez siebie będziemy mieli

$$\theta = \frac{\mathcal{H}_n^{(1)'}(v)}{\mathcal{H}_n^{(1)}(v)} = i - \frac{1}{2v} + 0(|v|^{-2}), \quad (39)$$

skąd łatwo obliczyć, że

$$\frac{1}{\theta} = - \left(i + \frac{1}{2v} \right) + 0(|v|^{-2}). \quad (40)$$

7. OBLICZENIE h_{nm} DLA FAL TYPU TM W FAŁOWODACH KOŁOWYCH

Równanie (35) wyznacza falę, która jest przeważnie poprzeczno-elektryczna, natomiast równanie (36) — falę przeważnie poprzeczno-magnetyczną. W dalszym ciągu nazywać je będziemy falami poprzeczno-elektrycznymi (TE) i poprzeczno-magnetycznymi (TM).

W przypadku fal przeważnie poprzeczno-magnetycznych (TM), zgodnie z wyrażeniem (35), oraz mając na uwadze, że $\frac{1}{|v|}$ i $\frac{1}{|k_2|}$ są nieskończenie małymi tego samego rzędu i ze względu na $\sigma \rightarrow \infty$, otrzymamy

$$\frac{I_n(u)}{I'_n(u)} = - \left(i + \frac{1}{2v} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{ak_1^2}{uv} + 0(|k_2|^{-3}). \quad (41)$$

Lewą stronę równania (41) rozwinieśmy na szereg Taylora wokół punktu u_{nm} , w którym $I_n(u_{nm}) = 0$, a uwzględniając wyrazy do drugiego rzędu będziemy mieli

$$\begin{aligned} \frac{I_n(u)}{I'_n(u)} = & f(u) = f(u_{nm}) + f'(u - u_{nm})(u - u_{nm}) + \\ & + \frac{1}{2} f''(u_{nm})(u - u_{nm})^2 + 0(|u - u_{nm}|^3), \end{aligned}$$

$$f(u_{nm}) = 0; \quad f'(u_{nm}) = 1, \quad f''(u_{nm}) = - \frac{I''_n(u_{nm})}{I'_n(u_{nm})}.$$

Opierając się na wzorze (7) otrzymamy

$$I_n''(u_{nm}) = - \left[\frac{1}{u_{nm}} I_n'(u_{nm}) + \left(1 - \frac{n^2}{u_{nm}^2} \right) I_n(u_{nm}) \right]$$

i ostatecznie

$$f''(u_{nm}) = \frac{1}{u_{nm}},$$

czyli

$$\frac{I_n(u)}{I_n'(u)} = x + \frac{x^2}{2u_{nm}} + O(|x|^3), \quad (42)$$

gdzie $x = u - u_{nm}$ oraz $|x| < 1$.

Z równości prawych stron równania (41) i (42) wynika, iż

$$x + O(|x|^2) = -i \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{ak_1^2}{uv} + O(|v|^{-2}), \quad (43)$$

a zatem:

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|v|^{-1}} = \text{const},$$

w przypadku, gdy wielkości występujące w równaniu (43) ustalimy z wyjątkiem σ . W dalszym ciągu $|x|$ i $\frac{1}{|v|}$ będziemy uważać jako małe tego samego rzędu. Rozwijamy więc prawą stronę równania (41) wokół punktu u_{nm} , uwzględniając tylko wyrazy liniowe, na podstawie (41) i (42) otrzymujemy

$$\frac{x^2}{2u_{nm}} + x = -i \left(1 - \frac{i}{2v} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{ak_1^2}{k_2} \left(\frac{1}{u_{nm}} - \frac{x}{u_{nm}^2} \right) + O(|k_2|^{-3}), \quad (44)$$

skąd po wprowadzeniu

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{i}{ak_2} = \frac{1+i}{a} \sqrt{\frac{\mu_2}{2\omega\mu_1^2\sigma}} = (1+i) \frac{\delta}{a},$$

i

$$K = i \left(1 - \frac{i}{2v} \right) \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{ak_1^2}{k_2} = (1+i) \delta ak_1^2 - i\delta^2 \frac{\mu_1}{\mu_2} k_1^2, \quad (45)$$

oraz uwzględnieniu (44) otrzymamy

$$x^2 + 2xu_{nm} \left(1 - \frac{K}{u_{nm}^2} \right) + 2K + O(|K|^3) = 0$$

i wtedy

$$x_{1,2} = -u_{nm} \left(1 - \frac{K}{u_{nm}^2} \right) \pm \sqrt{\left[u_{nm} \left(1 - \frac{K}{u_{nm}^2} \right) \right]^2 - 2K + O(|K|^3)}.$$

Wybieramy x o module bliskim zeru, zapewniającym zbieżność szeregu Taylora (42)

$$x = -\frac{K}{u_{nm}} \left(1 + \frac{K}{u_{nm}^2} \right) - \frac{K^2}{2u_{nm}^3} + O(|K|^3),$$

czyli

$$u = u_{nm} - \frac{K}{u_{nm}} \left(1 + \frac{K}{u_{nm}^2} \right) - \frac{K^2}{2u_{nm}^3} + O(|K|^3),$$

$$u^2 = u_{nm}^2 - 2K \left(1 - \frac{K}{u_{nm}^2} \right) + O(|K|^3).$$

Pamiętając, że $u^2 = a^2(k_1^2 - h^2)$ oraz na podstawie (45) otrzymamy

$$h_{nm}^2 = k_1^2 - \frac{u_{nm}^2}{a^2} + 2(1+i) \frac{\delta}{a} k_1^2 - 2i \frac{\delta^2}{a^2} \frac{\mu_1}{\mu_2} k_1^2 + 4i\delta^2 \frac{k_1^4}{u_{nm}^2} + O(\delta^3). \quad (46)$$

Częstotliwość graniczna dla TM wynosi

$$f_{nm} = \frac{u_{nm}}{2\pi a \sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$$

wobec tego można napisać

$$v^2 = \frac{f_{nm}^2}{f^2} = \frac{u_{nm}^2}{a^2 k_1^2}. \quad (47)$$

Korzystając z (46) i (47) otrzymamy wyrażenie na h_{nm} dla fal TM. Wyrażenie to jest słuszne dla każdej częstotliwości i każdego przewodnika, dla którego $\delta < 1$ oraz $\frac{1}{|\xi|} < 1$ (patrz (29) i uwaga po (33))

$$h_{nm}^2 = k_1^2 \left(1 - v^2 + 2 \frac{\delta}{a} + 2i \frac{\delta}{a} - 2i \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\delta^2}{a^2} + 4i \frac{\delta^2}{a^2} v^2 \right) + O(\delta^3).$$

Dla częstotliwości $f = f_{nm}$ będziemy mieli

$$h_{nm} = k_1 \sqrt{-\frac{\delta}{a} (1,55 + i 0,65) + O(\delta^2)}. \quad (48)$$

Dla częstotliwości granicznej i w bliskim otoczeniu, tłumienie i część rzeczywista stałej propagacji h_{nm} są rzędu $k_1 \sqrt{\frac{\delta}{a}}$. Dla $v^2 - 1 \gg \frac{\delta}{a}$ możemy napisać:

$$h_{nm} = ik_1 \sqrt{v^2 - 1} \left(1 - \frac{\frac{\delta}{a}}{v^2 - 1} \right) + \frac{k_1 \frac{\delta}{a}}{v^2 - 1} + O(\delta^2). \quad (49)$$

Tłumienie jest tu rzędu k_1 , część rzeczywista zaś h_{nm} rzędu $k_1 \frac{\delta}{a}$. Wzory (48) i (49) można wyznaczyć z większą dokładnością. Należy zaznaczyć, że

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{\mu_1}{\mu_2} d,$$

gdzie

$$d = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu_2 \sigma}},$$

jest głębokością przenikania pola elektromagnetycznego.

Dla $1 - v^2 \gg \frac{\delta}{a}$ będzie

$$h_{nm} = k_1 \sqrt{1 - v^2} \left[1 + \frac{\delta}{a} \frac{1+i}{1-v^2} - \frac{\delta^2}{a^2} i \frac{1}{1-v^2} + \frac{\delta^2}{a^2} i \frac{v^2}{1-v^2} \frac{\mu_2}{\mu_1} \right] + 0(\delta^3),$$

skąd

$$\beta_{nm}^* = k_1 \frac{\delta}{a} \frac{1+2 \frac{\delta}{a} \frac{\mu_1}{v^2} - \frac{\delta}{a} \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\delta}{a} \frac{1}{1-v^2}}{\sqrt{1-v^2}} + 0(\delta^3), \quad (50)$$

$$k_1 \frac{\delta}{a} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi f \mu_2 \varepsilon_1}{\mu_1 \sigma}}. \quad (51)$$

Biorąc pod uwagę wzór na współczynnik tłumienia (23), wyprowadzony metodą przybliżoną, otrzymuje się zgodnie z (50)

$$\beta_{nm}^* = \beta_{nm} \left(1 + \frac{\Delta \beta_{nm}}{\beta_{nm}} \right),$$

gdzie

$$\frac{\Delta \beta_{nm}}{\beta_{nm}} = \frac{\delta}{a} \left(\frac{2}{v^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{1}{1-v^2} \right) + 0(\delta^2). \quad (52)$$

8. OBLICZANIE \tilde{h}_{nm} DLA FAL TYPU TE W FALOWODACH KOŁOWYCH

Na podstawie (36), (39), (40) oraz zależności

$$u^2 = a^2 (k_1^2 - h^2)$$

otrzymamy

$$\frac{I_n'(u)}{I_n(u)} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[\left(i - \frac{1}{2v} \right) \frac{u}{v} + \left(i + \frac{1}{2v} \right) \frac{n^2}{v} \frac{a^2 k_1^2 - u^2}{u^3} \right] + 0(|v|^{-3}). \quad (53)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{i}{v} = (1+i) \frac{\delta}{a} = A,$$

napiżemy

$$\frac{I'_n(u)}{I_n(u)} = A \left(u - \frac{n^2}{u} + \frac{n^2 a^2 k_1^2}{u^3} \right) + \frac{1}{2} A^2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(u + \frac{n^2}{u} - \frac{n^2 a^2 k_1^2}{u^3} \right) + 0(|A|^3). \quad (54)$$

Gdy rozwinieśmy lewą stronę równania (54) na szereg Taylora wokół punktu \bar{u}_{nm} , gdzie $I'_n(\bar{u}_{nm})=0$,

$$\frac{I'_n(u)}{I_n(u)} = \bar{f}(u) = \bar{f}(\bar{u}_{nm}) + \bar{f}'(\bar{u}_{nm})(u - \bar{u}_{nm}) + \frac{1}{2} \bar{f}''(\bar{u}_{nm})(u - \bar{u}_{nm})^2 + 0(|u - \bar{u}_{nm}|^3),$$

$$\bar{f}(\bar{u}_{nm})=0, \quad \bar{f}'(\bar{u}_{nm}) = -\left(1 - \frac{n^2}{u_{nm}^2}\right), \quad \bar{f}''(\bar{u}_{nm}) = \frac{1}{u_{nm}} \left(1 - 3 \frac{n^2}{u_{nm}^2}\right).$$

Wprowadzając oznaczenie $\bar{x} = u - \bar{u}_{nm}$, otrzymujemy

$$\frac{I'_n(u)}{I_n(u)} = -\left(1 - \frac{n^2}{u_{nm}^2}\right) \bar{x} + \frac{1}{2 \bar{u}_{nm}} \left(1 - 3 \frac{n^2}{u_{nm}^2}\right) \bar{x}^2 + 0(|\bar{x}|^3), \quad (55)$$

na podstawie zaś równości prawych stron równania (53) i (55) możemy napisać

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \frac{|\bar{x}|}{|v|^{-1}} = \text{const},$$

gdzie $0 < \text{const} < \infty$. Wielkości występujące w (53) i (55) ustalono z wyjątkiem σ . Wartości $|\bar{x}|$ i $\frac{1}{|v|}$ są nieskończenie małymi tego samego rzędu ze względu na $\sigma \rightarrow \infty$. Rozwijając prawą stronę równania (54) na szereg Taylora i pamiętając, że $|A|$ i $|\bar{x}|$ są nieskończenie małymi tego samego rzędu ze względu na $\sigma \rightarrow \infty$, mamy

$$\begin{aligned} -\left(1 - \frac{n^2}{u_{nm}^2}\right) \bar{x} + \frac{1}{2 \bar{u}_{nm}} \left(1 - 3 \frac{n^2}{u_{nm}^2}\right) \bar{x}^2 = A \left[\bar{u}_{nm} - \frac{n^2}{\bar{u}_{nm}} + \frac{n^2 a^2 k_1^2}{u_{nm}^3} + \right. \\ \left. + \left(1 + \frac{n^2}{u_{nm}^2} - 3 \frac{n^2 a^2 k_1^2}{u_{nm}^4}\right) \bar{x} \right] + \frac{1}{2} A^2 \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\bar{u}_{nm} + \frac{n^2}{\bar{u}_{nm}} - \frac{n^2 a^2 k_1^2}{u_{nm}^3} \right) + 0(|\bar{x}|^3). \end{aligned} \quad (56)$$

Częstotliwość graniczna dla TE wynosi

$$\bar{f}_{nm} = \frac{\bar{u}_{nm}}{2\pi a \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1}}.$$

Można więc napisać

$$\bar{v}^2 = \frac{\bar{f}_{nm}^2}{f^2} = \frac{\bar{u}_{nm}^2}{a^2 k_1^2}.$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\kappa = \frac{\frac{n^2}{u_{nm}^2}}{1 - \frac{n^2}{u_{nm}^2}}$$

i dzieląc równanie (56) przez $1 - \frac{n^2}{u_{nm}^2}$ otrzymamy

$$\bar{x}^2 \frac{1-2\kappa}{2u_{nm}} - \bar{x} \left[1 + A \left(1 + 2\kappa - \frac{3\kappa}{v^2} \right) \right] - A \bar{u}_{nm} \left[1 + \frac{\kappa}{v^2} + \frac{1}{2} A \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(1 + 2\kappa - \frac{\kappa}{v^2} \right) \right] + 0(|\bar{x}|^3) = 0. \quad (57)$$

Po rozwiązaniu równania (57) w dalszym ciągu zajmujemy się tylko rozwiązaniem \bar{x} o module bliskim zera, zapewniającym zbieżność szeregu Taylora (55). Postępując jak w rozdziale poprzednim, otrzymujemy wyrażenie na \bar{h}_{nm}^2 dla fal TE. Wyrażenie to jest słuszne dla każdej częstotliwości i każdego przewodnika, dla którego $\delta < 1$ oraz $\frac{1}{|\xi|} < 1$ (patrz (29) i uwaga po (33))

$$\bar{h}_{nm}^2 = k_1^2 \left\{ 1 - \bar{v}^2 + 2 \frac{\delta}{\alpha} (\bar{v}^2 + \kappa) \left[1 + i - 2i \frac{\delta}{\alpha} (2 + \kappa) \left(1 - \frac{\kappa}{v^2} \right) + i \frac{\delta}{\alpha} \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(1 - 2\kappa \frac{1 - \bar{v}^2}{\kappa + v^2} \right) \right] \right\} + 0(\delta^3). \quad (58)$$

Dla częstotliwości $f = f_{nm}$

$$\bar{h}_{nm} = k_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha} (1 + \kappa) (1,55 + i 0,65) + 0(\delta^{\frac{3}{2}})}. \quad (59)$$

Dla $\bar{v}^2 - 1 \gg \frac{\delta}{\alpha}$

$$\bar{h}_{nm} = i k_1 \sqrt{\frac{\delta}{\alpha} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{\bar{v}^2 - 1}} \left(1 - \frac{\delta}{\alpha} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{\bar{v}^2 - 1} \right) + k_1 \frac{\delta}{\alpha} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{\sqrt{\bar{v}^2 - 1}} + 0(\delta^2). \quad (60)$$

Wzory (59) i (60) można wyznaczyć z większą dokładnością.

Dla $1 - \bar{v}^2 \gg \frac{\delta}{\alpha}$ mamy

$$\bar{h}_{nm} = k_1 \sqrt{1 - \bar{v}^2} \left\{ 1 + \frac{\delta}{\alpha} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{1 - \bar{v}^2} \left[1 + i + 2i \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{1}{2} - \kappa \frac{1 - \bar{v}^2}{\kappa + \bar{v}^2} \right) - (2 + \kappa) \left(1 - \frac{\kappa}{\bar{v}^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{1 - \bar{v}^2} \right) \right] \right\} + 0(\delta^3).$$

Stąd też łatwo możemy wyznaczyć $\bar{\beta}_{nm}^*$. Biorąc pod uwagę wzór na współczynnik tłumienia (24), wyprowadzony metodą przybliżoną, możemy napisać

$$\bar{\beta}_{nm}^* = \bar{\beta}_{nm} \left(1 + \frac{\Delta \bar{\beta}_{nm}}{\bar{\beta}_{nm}} \right),$$

gdzie

$$\frac{\Delta \bar{\beta}_{nm}}{\bar{\beta}_{nm}} = 2 \frac{\delta}{\alpha} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{1}{2} - \kappa \frac{1 - \bar{v}^2}{\kappa + \bar{v}^2} \right) - (2 + \kappa) \left(1 - \frac{\kappa}{\bar{v}^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{1 - \bar{v}^2} \right] + 0(\delta^2). \quad (61)$$

9. OCENA BŁĘDU WZORU PRZYBLIŻONEGO NA TŁUMIENIE W FALOWODACH KOŁOWYCH

W celu zbadania zależności błędu względnego od częstotliwości wzór (52) i (61) przedstawimy w następującej postaci:

$$w_{nm} = \frac{\Delta \bar{\beta}_{nm}}{\bar{\beta}_{nm}} = w_0 \sqrt{\bar{v}} \left(\frac{2}{\bar{v}^2} - \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{1}{1 - \bar{v}^2} \right),$$

$$\bar{w}_{nm} = \frac{\Delta \bar{\beta}_{nm}}{\bar{\beta}_{nm}} = 2 \bar{w}_0 \sqrt{\bar{v}} \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{1}{2} - \kappa \frac{1 - \bar{v}^2}{\kappa + \bar{v}^2} \right) - (2 + \kappa) \left(1 - \frac{\kappa}{\bar{v}^2} \right) - \frac{1}{2} \frac{\bar{v}^2 + \kappa}{1 - \bar{v}^2} \right] + 0(\delta^2),$$

gdzie

w_{nm} — jest błędem względnym dla TM_{nm} ,

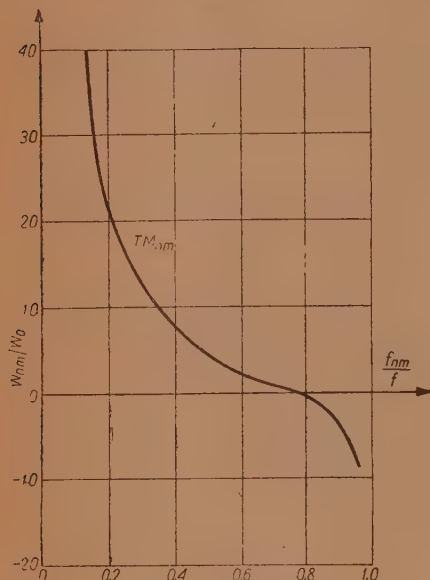
\bar{w}_{nm} — jest błędem względnym dla TE_{nm} ,

$$w_0 = \sqrt{\frac{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{2 \mu_1^2 \sigma u_{nm} a}},$$

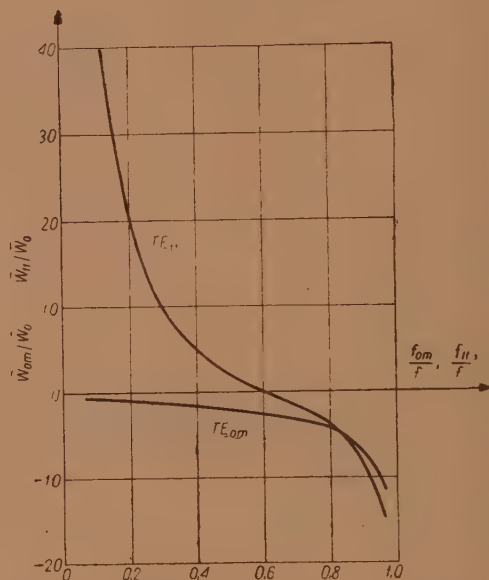
$$\bar{w}_0 = \sqrt{\frac{\mu_2 \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}{2 \mu_1^2 \sigma u_{nm} a}}.$$

Na rys. 1 i 2 przedstawiono krzywe zależności $\frac{w_{nm}}{w_0}$ i $\frac{\bar{w}_{nm}}{\bar{w}_0}$ od częstotliwości. Błąd względny dla TM_{nm} i TE_{nm} z wyjątkiem TE_{0m} zmienia znak z ujemnego na dodatni ze wzrostem częstotliwości. Dla częstotliwości bliskich częstotliwości granicznej, błąd popełniany przy metodzie przybli-

zonej polega głównie na przyjęciu prądów w ściankach jak w przewodniku idealnym. Powoduje to większe straty niż w rzeczywistości. W miarę wzrostu częstotliwości pole typu przeważnie TE ulega większej deformacji i dla rzeczywistego przypadku należałoby uwzględnić dodatkowe straty, podobnie jak dla typu TM. Podobnie dla typu przeważnie TM. Zmiana



Rys. 1. Krzywa zależności błędu względnego wzoru przybliżonego na współczynnik tłumienia w falowodach kołowych dla fal TM_{nm} i $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$.



Rys. 2. Krzywe zależności błędu względnego wzorów przybliżonych na współczynnik tłumienia w falowodach kołowych dla fal TE_{om} , TE_{11} i $\frac{\mu_1}{\mu_2} = 1$.

znaku błędu względnego zachodzi w przybliżeniu dla częstotliwości, przy której tłumienie osiąga minimum. Dla fali TE_{om} styczna składowa pola magnetycznego ze wzrostem częstotliwości maleje zmierzając do zera (co można wywnioskować z równań (18)). Ten typ fal dla częstotliwości $f > f_{nm}$ jest zawsze ściśle tego samego rodzaju. Ze wzrostem częstotliwości fale TE_{om} stają się niestabilne, jakakolwiek asymetria lub zagięcia falowodu powodują zjawienie się prądów w ściankach i odpowiednie zwiększenie strat oraz transformację fali rodzaju TE_{om} w falę innego rodzaju. Dla częstotliwości w pobliżu częstotliwości granicznej znany wzór przybliżony na tłumienie wskazywałby na nieograniczony wzrost tłumienia co jest sprzeczne ze znanymi faktami i przytoczonymi obliczeniami. Część rzeczywista i urojona stałej propagacji h dla częstotliwości granicznej jest

$$\text{rzędu } k_1 \sqrt{\frac{d}{a}},$$

gdzie

d — głębokość przenikania,

a — promień falowodu,

k_1 — współczynnik propagacji ośrodka.

Dla dużych częstotliwości tłumienie wzrasta jeszcze szybciej niż to wynikałoby ze wzoru przybliżonego.

*

*

*

Na zakończenie składam podziękowanie doc. K. Bochenkowi za pomoc okazaną przy wykonywaniu niniejszej pracy.

Zakład Elektrotechniki Teoretycznej

I. P. P. T. — P. A. N.

WYKAZ LITERATURY

1. De Broglie L.: *Problèmes de propagation guidées des ondes electromagnétiques*. Paris 1951, Rozdz. IV.
2. Courant R., Hilbert D.: *Methoden der Mathem. Physik*. Berlin, 1951, s. 455
3. Hertz H. R.: *Ann. Physik* 36, 1 (1888) ogólniejsze rozwiązanie podane przez Righi-Bologna. *Il nouvo cimento* (5) 2,2 (1901).
4. Sommerfeld A.: *Ann. Physik* 15, 673, 1904.
5. Straton J. A.: *Electromagnetic theory*. New York and London 1941, rozdz. 1
6. Straton J. A.: *Electromagnetic theory*. Rozdz. IX.

А. ТУРСКИ

РАСЧЁТ ПОТЕРЬ В ГЛАДКИХ СТЕНКАХ КРУГЛЫХ ВОЛНОВОДОВ НА ОСНОВАНИИ УРАВНЕНИЙ МАКСУЭЛЛА

Резюме

Электромагнитные волны, распространяющиеся в волноводах, проводимость стенок которых всегда ограничена, проникают в стенки, вызывая в них токи дающие потери вследствие эффекта Джоуля. Выражения для электромагнитного поля должны заключать факторы $e^{-\beta z} e^{i(az - wt)}$. Первый из них выражает затухание, второй — распространение.

Известны два метода приближенного расчёта затухания. Первый из них применяемый шире, состоит в определении токов в стенке волновода на основании касательного магнитного поля для стенки с идеальной проводимостью. Полученный таким образом ток позволяет определить потери при заданной поверхностной сопротивляемости. Иначе говоря, токи в действительных проводниках принимаются такими как в идеальных и для рассчитанных таким образом токов определяются потери, при учёте поверхностной сопротивляемости стенок волновода.

Второй, более новый метод, указанный Л. де Бройлем, точнее. Метод этот учитывает факт, что поле имеет иную форму, чем в случае идеальной проводимости. Он принимает постоянную распространения:

$$h = \alpha^0 + \delta\alpha + i\beta$$

где α^0 постоянная распространения для стенок с идеальной проводимостью. Затем, предполагая $\delta\alpha$ и β малыми по отношению к α^0 и предполагая далее, что

постоянная распространения в проводнике значительно больше чем $|h|$, определяются приближенные выражения поля в стенках и внутри волновода. Пользуясь непрерывностью касательных составляющих электрического и магнитного полей и нормальных составляющих электрической и магнитной индукции, мы получаем зависимости, из которых рассчитываем δa и β . В этом методе принимаются выражения электромагнитного поля исключительно типов: поперечно электрического (ТЕ) и поперечно-магнитного (ТМ). Метод этот целесообразен в случае симметричных относительно оси полей, ибо, как это с другой стороны известно, мы имеем дело с полем типа в точности ТЕ и ТМ. Для волн высших порядков следует в этом методе ввести некоторую деформацию поля, т.к. в противном случае не были бы удовлетворены условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей на границах сред.

Таким образом этот метод позволяет предвидеть возникновение волн не принадлежащих точно к поперечно-электрическому или поперечно-магнитному типу в случае не идеальной проводимости стенок. При помощи этого метода получен коэффициент затухания только для волн в круглом волноводе симметричных относительно оси. Полученные результаты тождественны с результатами предыдущего метода.

В настоящей работе представлен метод, позволяющий оценить погрешность приближенных формул вследствие отклонения от действительной проводимости материалов и от частоты, а также позволяющий определить формулы постоянной распространения волн в круглом волноводе для предельной частоты и низших частот. Известные методы этих возможностей не дают. Мы здесь исходим из точных предпосылок, основываясь на уравнениях Максвелла. Основные выводы этого метода похожи на выводы Sommerfelda в случае рассматривания распространения волн вдоль одного провода. Они состоят в точном определении выражений поля внутри круглых волноводов и в их стенках без предположения идеальной проводимости стенок и в приближенном решении трансцендентного уравнения. Это уравнение получается из условия непрерывности касательных составляющих напряженности полей на границе двух сред. Корни этого уравнения дают возможные значения постоянной распространения а следовательно и коэффициента затухания. Решение получается при помощи аппроксимации функции Бесселя, соответствующей пределам, к которым принадлежат значения аргументов.

Полученные при помощи этого метода результаты позволяют оценить погрешность предыдущих методов расчёта затухания для всех типов волн в круглых волноводах.

A. TURSKI

CALCULATION OF LOSSES IN SMOOTH WALLS OF CIRCULAR WAVE GUIDES² ON THE BASIS OF MAXWELL'S EQUATIONS

Summary

When electromagnetic waves are propagated in wave-guides whose walls finite conductivity, the waves penetrate into the walls. The currents thus generated cause losses as a result of the Joule effect. The expressions for the electromagnetic field must contain the factors $e^{-\beta z} e^{i(\omega t - wt)}$. The first factor represents the damping, and the second, the propagation.

Two approximation methods are known for calculating the damping. In one, widely used, the currents in the walls of the wave-guide are found with the help of the tangential magnetic field for perfectly conducting walls. The current having been found the losses at a given surface resistance can be determined. In other words, it is assumed that the currents in real conductors are the same as for perfect conductors; the currents so calculated are then used to determine the losses for wave-guide walls having a finite surface resistance.

The other, more exact method was developed by L. de Broglie. It takes into account the fact that the field has not the same shape precisely as in the case of perfectly conducting walls. De Broglie represented the propagation constant in the following form:

$$h = a^0 + \delta a + i\beta$$

where a^0 is the propagation constant for perfectly conducting walls. Then assuming δa and β small in relation to a^0 and assuming that the propagation constant in real conductors is considerably larger than $|h|$, an approximate expression for the field in the internal walls of the wave-guide can thus be found. Making use of the boundary conditions for the tangential components of the electric magnetic fields and for the normal components of the electric and magnetic induction, relations are obtained from which δa and β can be calculated. In this method it is assumed that the electromagnetic field is propagated strictly as transverse electric (TE) or transverse magnetic (TM) waves. This method is effective in cases of axial symmetry, since, as we already know, we are then dealing with fields which are strictly TE and TM. For higher modes of waves a certain deformation of the field must be introduced, or the boundary conditions for the tangential components of the electric field and magnetic fields of the medium, will not be satisfied. This method, therefore, allows us to foresee waves which are not strictly of the TE and TM types for the case of walls having imperfect conductivity. Using this method we calculated the damping coefficient only for axial symmetric waves in a circular wave-guide. The results obtained are identical with those obtained by using the first method.

In this paper, a method is presented which makes it possible to estimate the error that arises in the approximation formulae as a result of the influence of the finite conductivity of the walls and the frequency. This method permits also the determination of the formulae for the wave propagation constant in circular wave-guides at frequencies equal to and less than the cut-off frequency. The previously described methods do not allow this to be done. The method is developed here on the basis of Maxwell's equations. The basic approach of this method is similar to the one used by Sommerfeld for the propagation of guided waves along a single solid conductor. This approach allows the field to be determined accurately inside the circular wave-guide and within its walls, without making the assumption that the walls are perfectly conducting. The method employs an approximate solution of a transcendental equation. This transcendental equation arises from conditions for the transition of the tangential components at the boundary of the two media. The roots of this equation give the possible values of the propagation constant h and at the same time, the damping factor. The solution is obtained by using approximation formulae for Bessel functions appropriate to the range of the arguments in the given case.

The results obtained by this method allow the estimation of the error introduced by the previously mentioned methods for calculating the damping for all types of waves in circular wave guides.

ERRATA

Zeszyt 2 — Tom V — 1956

Str.	Wiersz		Jest	Powinno być
	od dołu	od góry		
214		Rys. 5	Rys. 5	Rys. 4
216		Rys. 6 i 7	Zamieniono podpisy pod rys. 6 i 7	
217		8	Q	Q'_1
217	9		K	K'
218		11	$+H$	$+H'$
218		25	na K	na K'
219		9	$-q$	$-q_i$
219		15	$(-\cos \vartheta)$	$(1 - \cos \vartheta)$
221	9		$\frac{r}{D-a_1} \frac{\beta_1}{r}$	$\frac{r}{D-a_1} = \frac{\beta_1}{r}$
228	2		Przypadek $=\infty$	Przypadek $\kappa=\infty$
232	4		$S+T$	$-S-T$
233		Rys. 14	$\delta=3$ dotyczy dolnej krzywej	
			$\delta=5$ dotyczy środkowej krzywej	
			$\delta=20$ dotyczy górnej krzywej	

WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim, francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w innym języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołaania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

U w a g a: Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN. tel. 8.32.04. Redakcja czynna w poniedziałki, środy i piątki.

